Revista Electronică MateInfo.ro
MARTIE

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

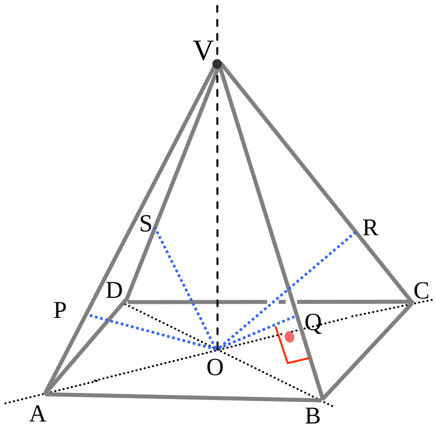
Aşteptăm materale pentru revistă în fiecare lună pe *revistaelectronica@mateinfo.ro*

1.APLICAŢII ALE **ANALIZEI MATEMATICE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (7)** „PIRAMIDA ORTOGONALĂ"

Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop" Cluj-Napoca

Aplicaţie

Se dă piramida patrulateră regulată V*ABCD* cu latura bazei $AB = a$ având înălţimea *OV* de lungime variabilă $(AC \cap BD = O)$.
Punctele P,Q,R,S sunt proiecţiile punctului *O* respectiv pe muchiile *VA, VB, VC* , *VD*.
Piramida *OPQRS* astfe formată o vom numi piramida ortogonală; se cere studiul variaţiei volumului acestei piramide în condiţiile date.



SOLUŢIE: Notăm $OV = x$ (lungimea variabilă a înălţimii piramidei) , $O' = PR \cap SQ$ şi $h = OO'$ înălţimea piramidei *OPQRS* .

Din triunghiul dreptunghic *VOC* obţinem

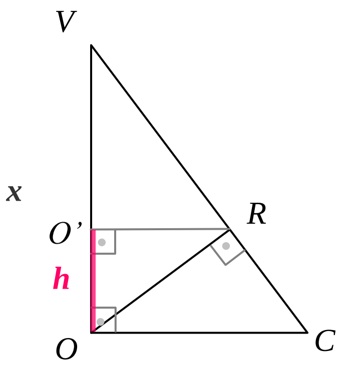
$$CV = \sqrt{OC^2 + OV^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{\sqrt{2x^2 + a^2}}{\sqrt{2}} \;;$$

apoi $OR = \dfrac{OC \cdot x}{CV} = \dfrac{ax}{\sqrt{2x^2 + a^2}}$.

Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic

ORV se obţine $OR = \sqrt{x \cdot h} \Rightarrow$

$$xh = OR^2 \Rightarrow h = \frac{OR^2}{x} \Rightarrow h = \frac{a^2 x}{2x^2 + a^2}.$$

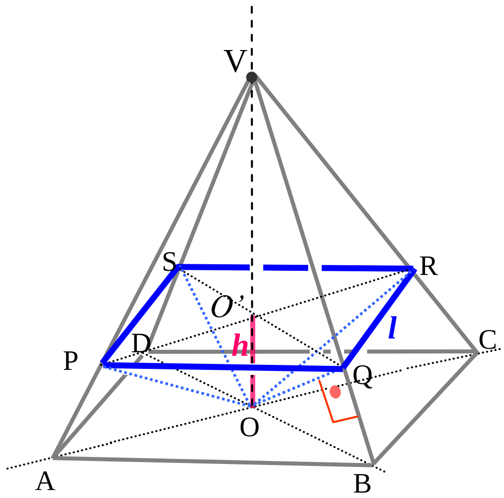


Notăm $l = QR$ (lungimea laturii bazei piramidei *OPQRS*).

Din asemănarea unor triunghiuri specifice ce rezultă din paralelismul planelor

ABC şi PQR obţinem:

$$\frac{l}{a}=\frac{x-h}{x}\Rightarrow l=\frac{a(x-h)}{x}\overset{(*)}{\Rightarrow} l=\frac{2ax^2}{2x^2+a^2}.$$



Trecem la calculul volumului:

$$V_{OPQRS}=\frac{A_{PQRS}\cdot h}{3}=\frac{l^2\cdot h}{3}\overset{(*),(**)}{\Rightarrow}$$

$$V_{OPQRS}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a^4x^5}{(2x^2+a^2)^3}$$

În cele de mai sus am considerat latura bazei fiind egala cu a . Pentru reprezentarea grafică a variaţiei volumului avem nevoie de un caz particular care nu va dăuna studiului propus şi anume considerăm latura bazei piramidei iniţiale latura unui pătrat înscris într-un cerc de rază 1.Astfel, latura bazei este $a=\sqrt{2}$ iar volumul „piramidei ortogonale" este dat de :

$$V_{OPQRS}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{(x^2+1)^3}.$$

S-au creat în felul acesta toate elementele pentru construcţia funcţiei:

$$f:[0,+\infty)\to R,\quad f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{(x^2+1)^3}$$

Preliminarii în determinarea graficului:

$f(0)=0\Rightarrow O(0,0)\in G_f$; $\lim_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow Ox$ este asimptotă orizontală.

Derivata funcţiei este $f':[0,+\infty)\to R,\quad f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4(5-x^2)}{(x^2+1)^4}$

Ecuaţia derivatei $f'(x) = 0$, conduce la soluţia $x_0 = \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{25\sqrt{5}}{216} \cong 0{,}17$

(aproximarea este făcută cu două zecimale).

Tabloul de variaţie al funcţiei

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + + + + + +	0	− − − − − − − − − − − − −	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{5})$	$\searrow$	0

Deducem că $\max f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{25\sqrt{5}}{216}$

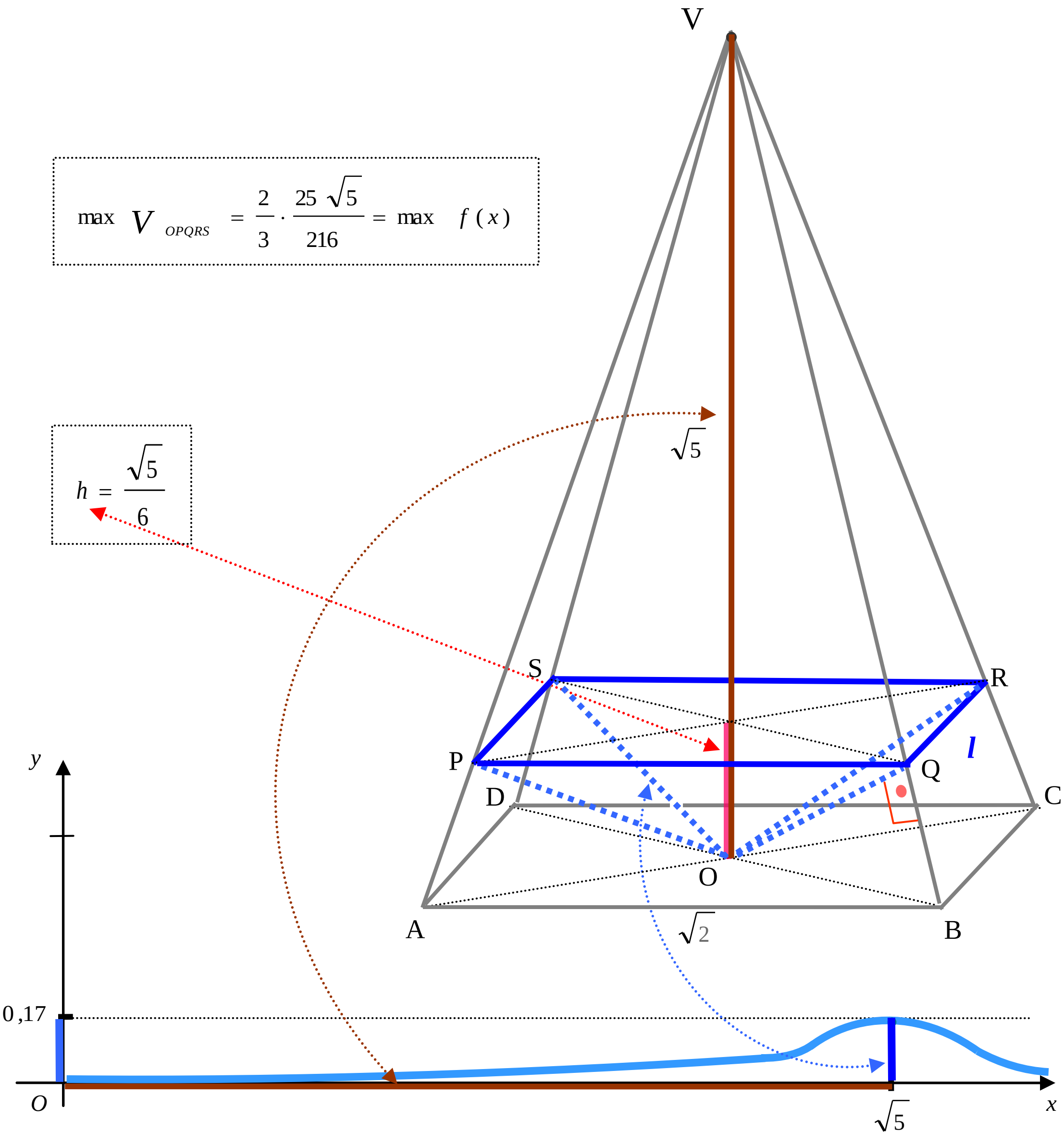
Latura bazei şi înălţimea „piramidei ortogonale” este

$l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$ respective $h = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

Prezentarea graficului funcţiei şi a conexiunile corespunzătoare:

$$\max V_{OPQRS} = \frac{2}{3}\cdot\frac{25\sqrt{5}}{216} = \max f(x)$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{6}$$



2. Solutions to the problems 5176, 5179 and 5180 posted in the *School Science and Mathematics* Journal – November 2011 other than those presented in the *School Science and Mathematics* Journal– February 2012

by TITU ZVONARU[1] and NECULAI STANCIU[2]

- **5176:** *Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY*

  Solve:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3^2 \\ y^2+yz+z^2=4^2 \\ z^2+xz+x^2=5^2. \end{cases}$$

Solution:
Subtracting the first equation on the second, the second on the third and the third on the first we get

$$\begin{cases} (x-z)(x+y+z)=-7 \\ (y-x)(x+y+z)=-9 \\ (z-y)(x+y+z)=16 \end{cases} \qquad (1)$$

and we deduce that $x \neq y \neq z \neq x,\ x+y+z \neq 0$ .From the first two equations we deduce that $\frac{x-z}{y-x}=\frac{7}{9} \Rightarrow 9x-9z=7y-7x \Rightarrow z=\frac{16x-7y}{9}$, and then replacing in the system equations we obtain one equation

$$(x-y)(25x+2y)=81 \Leftrightarrow 25x^2-23xy-2y^2-81=0,$$

which has real solutions for every y, because $\Delta=729y^2+8100>0$.
From here we obtain the solutions (exercise!).

[1] Comăneşti
[2] Şc. Gen. George Emil Palade, Buzău

- **5179:** *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain*

  Find all positive real solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of the system

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{x_2 + 11} = \sqrt{x_2 + 76}, \\ x_2 + \sqrt{x_3 + 11} = \sqrt{x_3 + 76}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + \sqrt{x_n + 11} = \sqrt{x_n + 76}, \\ x_n + \sqrt{x_1 + 11} = \sqrt{x_1 + 76}. \end{cases}$$

Solution:

If we denote $f(x) = \sqrt{x + 76} - \sqrt{x + 11}$, then the system becomes

$$x_1 = f(x_2);\ x_2 = f(x_3); \ldots;\ x_{n-1} = f(x_n);\ x_n = f(x_1).$$

If $1 \le i \le n$, then $x_i \in [0, \infty)$ and $f^{n}(x_i) = x_i$, where f^{n} is the composition $f \circ f \circ \ldots \circ f$. We show that $x_i = 5$. We note that $f([0, \infty)) \subset [0, \infty)$ and $f(5) = 5$. We have

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x + 76}} - \frac{1}{\sqrt{x + 11}}\right) \Rightarrow \left|f'(x)\right| < \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \le \frac{1}{2}.$$

We denote $M = \frac{1}{2}$, and by induction we deduce that

$$\left|\left(f^{n}\right)'(x)\right| < M^{n}, M < 1,\ for\ any\ x \ge 0,\ and\ n \text{ is positive integer}.$$

Suppose by absurd that $x_i \ne 5$. Then by *Lagrange*' s theorem and from above we have that there exists $c \in (x_i, 5)$ for which

$$\left|x_i - 5\right| = \left|\left(f^{n}\right)(x_i) - \left(f^{n}\right)(5)\right| = \left|\left(f^{n}\right)'(c)\right|\left|x_i - 5\right| \le M^{n}\left|x_i - 5\right|,$$

contradiction! with $M < 1$.

Therefore, $x_i = 5,\ for\ any\ 1 \le i \le n$. Conversely $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 5$ is evidentely a solution of the given system.

So the solution of the system is

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (5, 5, \ldots, 5).$$

- **5180:** *Paolo Perfetti, Department of Mathematics, "Tor Vergata" University, Rome, Italy*

  Let a, b and c be positive real numbers such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{1+a}{bc} + \frac{1+b}{ac} + \frac{1+c}{ab} \ge \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 - ab}} + \frac{4}{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}} + \frac{4}{\sqrt{a^2 + c^2 - ac}}.$$

Solution:

Because $a^2 - ab + b^2 = \frac{3(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ and $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ is sufficient to prove the inequality

$$\frac{4(1+a)}{(b+c)^2} + \frac{4(1+b)}{(a+c)^2} + \frac{4(1+c)}{(a+b)^2} \geq \frac{8}{a+b} + \frac{8}{b+c} + \frac{8}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b+c}{(b+c)^2} + \frac{a+2b+c}{(a+c)^2} + \frac{a+b+2c}{(a+b)^2} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a},$$

but because $\frac{2a+b+c}{(b+c)^2} = \frac{2a}{(b+c)^2} + \frac{1}{b+c}$, we need to prove that

$$\frac{2a}{(b+c)^2} + \frac{2b}{(a+c)^2} + \frac{2c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \tag{1}$$

We have

$$\frac{2a}{(b+c)^2} - \frac{1}{b+c} = \frac{a-b}{(b+c)^2} + \frac{a-c}{(b+c)^2}$$

$$\frac{2b}{(a+c)^2} - \frac{1}{a+c} = \frac{b-c}{(a+c)^2} + \frac{b-a}{(a+c)^2}$$

$$\frac{2c}{(a+b)^2} - \frac{1}{a+b} = \frac{c-a}{(a+b)^2} + \frac{c-b}{(a+b)^2}.$$

Because

$$\frac{a-b}{(b+c)^2} + \frac{b-a}{(a+c)^2} = \frac{(a-b)\left[(a+c)^2 - (b+c)^2\right]}{(b+c)^2(a+c)^2} = \frac{(a-b)^2(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2},$$

and analogous, we obtain the identity

$$\sum_{cyclic} \frac{2a}{(b+c)^2} - \sum_{cyclic} \frac{1}{a+b} = \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2},$$

which prove the inequality (1).

We have equality if and only if $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. Problema lunii MARTIE 2012 - www.mateinfo.ro

Fie P un punct interior triunghiului ABC. Dreptele AP, BP, CP intersectează laturile opuse respectiv în A_1, B_1, C_1. Prin punctul P se duc dreptele A_2B_3, B_2C_3, C_2A_3 paralele respectiv la laturile AB, BC, CA, cu $A_2, A_3 \in [BC]$, $B_2, B_3 \in [CA]$, $C_2, C_3 \in [AB]$.

Notăm cu S aria suprafeţei triunghiulare ABC, şi cu S_1, S_2, S_3 ariile suprafeţelor triunghiulare CB_2A_3, BA_2C_3 respectiv, AC_2B_3 (determinate de vârfurile triunghiului şi punctele cele mai apropiate de ele, situate pe laturile alăturate).

Arătaţi că au loc inegalităţile:

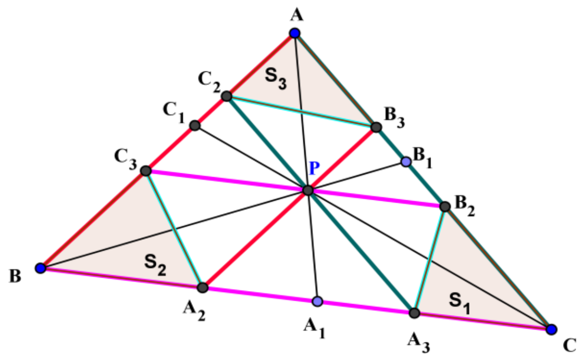
1. $S \leq \frac{(S_1 + S_2 + S_3)^4}{9S_1S_2S_3}$

2. $54\sqrt{S}(S_1 + S_2 + S_3) - 27\sqrt{S_1S_2S_3} \leq 17S\sqrt{S}$

3. $\frac{BA_2 + CA_3}{BA_2 + CA_3 + 2A_2A_3} + \frac{CB_2 + AB_3}{CB_2 + AB_3 + 2B_2B_3} + \frac{AC_2 + BC_3}{AC_2 + BC_3 + 2C_2C_3} \geq \frac{3}{2}$

Autor: Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Şcolar „Al. Vlahuţă” Şendriceni, jud. Botoşani

Soluţie:



1.

Pentru a demonstra prima inegalitate vom utiliza trei rezultate din articolul „*Rezolvarea geometrică a unor inegalităţi*” apărut în Gazeta Matematică nr.12/2011, seria B, autori: Cezar Lupu, Rozalia Marinescu şi Steluţa Monea.

I. Inegalitatea lui Weitzenböck (IW). *În orice triunghi ABC, având aria S, are loc inegalitatea:*

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

II. Lema 1. *Pentru orice $x, y, z > 0$, avem inegalităţile:*

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x+z} + \sqrt{y+z}.$$

III. Lema 2. *Pentru orice $x, y, z > 0$, există un triunghi având laturile $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{x+z}$, $\sqrt{y+z}$ a cărui arie S' este egală cu:*

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{xy+xz+yz}.$$

Avem:

$$S_1 = \frac{CA_3 \cdot CB_2 \cdot \sin C}{2}, \qquad S_2 = \frac{BA_2 \cdot BC_3 \cdot \sin B}{2}, \qquad S_3 = \frac{AC_2 \cdot AB_3 \cdot \sin A}{2}$$

$$S = \frac{CA \cdot CB \cdot \sin C}{2} = \frac{BC \cdot BA \cdot \sin B}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}.$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{CA_3 \cdot CB_2 \cdot \sin C}{2}}{\frac{CA \cdot CB \cdot \sin C}{2}} = \frac{CA_3}{CB} \cdot \frac{CB_2}{CA} \qquad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\frac{BA_2 \cdot BC_3 \cdot \sin B}{2}}{\frac{BC \cdot BA \cdot \sin B}{2}} = \frac{BA_2}{BC} \cdot \frac{BC_3}{BA} \qquad (2)$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{\frac{AC_2 \cdot AB_3 \cdot \sin A}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}} = \frac{AC_2}{AB} \cdot \frac{AB_3}{AC} \qquad (3)$$

Din $PA_3 \parallel B_1C \Rightarrow \dfrac{CA_3}{CB} = \dfrac{B_1P}{B_1B}$ $\qquad (4)$

Din $PB_2 \parallel A_1C \Rightarrow \frac{CB_2}{CA} = \frac{A_1P}{A_1A}$ $\quad (5)$

Înlocuim (4) şi (5) în (1) şi avem:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{B_1P}{B_1B} \cdot \frac{A_1P}{A_1A} \qquad (6)$$

Din $PA_2 \parallel C_1B \Rightarrow \frac{BA_2}{BC} = \frac{C_1P}{C_1C}$ $\quad (7)$

Din $PC_3 \parallel A_1B \Rightarrow \frac{BC_3}{BA} = \frac{A_1P}{A_1A}$ $\quad (8)$

Înlocuim (7) şi (8) în (2) şi avem:

$$\frac{S_2}{S} = \frac{C_1P}{C_1C} \cdot \frac{A_1P}{A_1A} \qquad (9)$$

Analog, avem şi relaţia:

$$\frac{S_3}{S} = \frac{B_1P}{B_1B} \cdot \frac{C_1P}{C_1C} \qquad (11)$$

Pentru comoditatea scrierii, facem următoarele notaţii:

$$\frac{B_1P}{B_1B} = a, \quad \frac{A_1P}{A_1A} = b, \quad \frac{C_1P}{C_1C} = c. \qquad (*)$$

Din teorema lui *Gergonne*, avem $a + b + c = 1$.

Avem: $ab, ac, bc > 0$ şi, conform **Lemei 2**, există un triunghi având laturile $\sqrt{ab+ac}$, $\sqrt{ab+bc}$, $\sqrt{bc+ac}$ a cărui arie este egală cu:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{ab \cdot ac + ab \cdot bc + bc \cdot ac} = \frac{1}{2}\sqrt{abc(a+b+c)} \overset{a+b+c=1}{=} \frac{1}{2}\sqrt{abc}.$$

Dar, conform inegalităţii lui **Weitzenböck,** avem:

$$\left(\sqrt{ab+ac}\right)^2 + \left(\sqrt{ab+bc}\right)^2 + \left(\sqrt{bc+ac}\right)^2 \geq 4S'\sqrt{3} \Rightarrow 2(ab+ac+bc) \geq$$

$$\geq 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{abc} \Rightarrow ab + ac + bc \geq \sqrt{3abc}. \qquad (12)$$

Inegalitatea (12) este echivalentă cu:

$$ab+ac+bc \geq \sqrt{3abc} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S}+\frac{S_3}{S}+\frac{S_2}{S} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S^3}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1+S_2+S_3}{S} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{S_1S_2S_3}{S^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{S_1+S_2+S_3}{S}\right)^4 \geq 3^2\cdot\frac{S_1S_2S_3}{S^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(S_1+S_2+S_3)^4}{S^4} \geq 9\cdot\frac{S_1S_2S_3}{S^3}\Big/\cdot S^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(S_1+S_2+S_3)^4}{S} \geq 9\cdot S_1S_2S_3\Big/\cdot\frac{S}{9\cdot S_1S_2S_3} \Leftrightarrow \frac{(S_1+S_2+S_3)^4}{9\cdot S_1S_2S_3} \geq S \quad \square$$

2.

Prelucrăm, pentru început, cerinţa problemei:

$$54\sqrt{S}\,(S_1+S_2+S_3)-27\sqrt{S_1S_2S_3} \leq 17S\sqrt{S} \Leftrightarrow \frac{S_1+S_2+S_3}{S}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{S\sqrt{S}} \leq \frac{17}{54}$$

Din (6), (9) şi (11), inegalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{S\sqrt{S}} \leq \frac{17}{54} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S^3}} \leq \frac{17}{54} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{B_1P}{B_1B}\cdot\frac{A_1P}{A_1A}+\frac{C_1P}{C_1C}\cdot\frac{A_1P}{A_1A}+\frac{B_1P}{B_1B}\cdot\frac{C_1P}{C_1C}-\frac{\frac{B_1P}{B_1B}\cdot\frac{A_1P}{A_1A}\cdot\frac{C_1P}{C_1C}}{2} \leq \frac{17}{54} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} ab+bc+ac-\frac{abc}{2} \leq \frac{17}{54}$$

Cu alte cuvinte, avem de arătat că:

$$ab+bc+ac-\frac{abc}{2} \leq \frac{17}{54},\ \forall\, a,b,c>0 \text{ şi } a+b+c=1 \qquad (13)$$

Cazul $a=b=c=\frac{1}{3}$ ce corespunde situaţiei $P=G$ (centrul de greutate), este imediat şi avem, în acest caz, egalitate. Analizăm cazul $P \neq G$.

Deoarece $a+b+c=1$, cel puţin unul dintre a, b sau c este mai mic sau egal decât $\frac{1}{3}$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că:

$$a \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow 1-3a \geq 0 \qquad (14)$$

<u>*Observaţie*</u>: *Se poate arăta chiar că* $ab+bc+ac-\frac{abc}{2}>0$:

$$ab+bc+ac-\frac{abc}{2}>0 \Leftrightarrow ac+ab+(1-3a)bc+\frac{5abc}{2}>0 \qquad (A)$$

Inegalitatea mediilor ne conduce la:

$$bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\overset{a+b+c=1}{=}\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \qquad (15)$$

Cu ajutorul relaţiilor (14) şi (15), membrul stâng din inegalitatea (13) devine:

$$ab+ac+bc-\frac{abc}{2}=a(b+c)+bc\left(1-\frac{a}{2}\right)\le a(1-a)+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\left(1-\frac{a}{2}\right) \qquad (16)$$

Deoarece am putut exprima membrul stâng din (13) doar în funcţie de a, apare ideea de a studia variaţia funcţiei:

$$f:\left(0,\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R},\qquad f(a)=-\frac{a^3}{8}-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{8}a+\frac{1}{4}$$

$$f'(a)=-\frac{3}{8}a^2-a+\frac{3}{8}.$$

Avem următorul tabel de variaţie asociat funcţiei f :

(pentru f': $\Delta=\frac{25}{16}$; $a_1=-3$; $a_2=\frac{1}{3}$; $a_1\notin\left(0,\frac{1}{3}\right]$.)

a	0							$\frac{1}{3}$
$f'(a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$f(a)$	$\frac{1}{4}\left(=\lim\limits_{x\searrow 0} f(a)\right)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{17}{54}$

Funcţia ... nstraţia.

3.

Prelucrăm mai întâi inegalitatea:

$$\frac{BA_2+CA_3}{BA_2+CA_3+2A_2A_3}+\frac{CB_2+AB_3}{CB_2+AB_3+2B_2B_3}+\frac{AC_2+BC_3}{AC_2+BC_3+2C_2C_3}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{BC-A_2A_3}{BC+A_2A_3}+\frac{AC-B_2B_3}{AC+B_2B_3}+\frac{AB-C_2C_3}{AB+C_2C_3}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\frac{A_2A_3}{BC}}{1+\frac{A_2A_3}{BC}}+\frac{1-\frac{B_2B_3}{AC}}{1+\frac{B_2B_3}{AC}}+\frac{1-\frac{C_2C_3}{AB}}{1+\frac{C_2C_3}{AB}}\geq\frac{3}{2}\qquad(17)$$

Forma inegalităţii (17) ne impune studiul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

Observaţie: Se poate considera, pentru cazul nostru, mai degrabă, restricţia acestei funcţii la intervalul $(0,1)$.

Avem:

$$f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2};\qquad f''(x)=\frac{4}{(1+x)^3}$$

Deoarece $f''(x)=\frac{4}{(1+x)^3}>0,\ \forall x>0$, avem că funcţia f este strict convexă pe intervalul $(0,\infty)$. Ca atare: $\forall x_1,x_2,x_3\in(0,\infty)$ şi $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=1$, are loc:

$$f\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{3}\lambda_i f(x_i)\qquad(18)$$

În (18) alegem:

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$ şi $x_1=\frac{A_2A_3}{BC}$; $x_2=\frac{B_2B_3}{AC}$; $x_3=\frac{C_2C_3}{AB}$.

Avem: $x_1=\frac{A_2A_3}{BC}=\frac{A_1P}{A_1A}$; $x_2=\frac{B_2B_3}{AC}=\frac{B_1P}{B_1B}$; $x_3=\frac{C_2C_3}{AB}=\frac{C_1P}{C_1C}$ (vezi problema lunii februarie), ca atare $x_1+x_2+x_3=1$ (**Teorema lui Gergonne**).

Inegalitatea (18) devine:

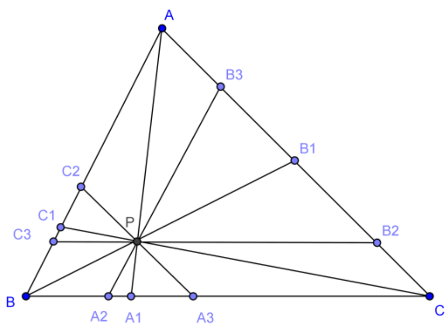
$$f\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{3}\lambda_i f(x_i)\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\Leftrightarrow$$

$$\overset{x_1+x_2+x_3=1}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{\frac{1-x_1}{1+x_1}+\frac{1-x_2}{1+x_2}+\frac{1-x_3}{1+x_3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq\frac{1-\frac{A_2A_3}{BC}}{1+\frac{A_2A_3}{BC}}+\frac{1-\frac{B_2B_3}{AC}}{1+\frac{B_2B_3}{AC}}+\frac{1-\frac{C_2C_3}{AB}}{1+\frac{C_2C_3}{AB}}\qquad\square$$

Alte soluţii:

1. Prof. Păcurar Cornel Cosmin , Col . Naţ . "I.M. Clain " , Blaj



1.Notăm AC_2=x,AB_3=y,BA_2=v,BC_3=p,CB_2=t,CA_3=z,AB=c,BC=a,AC=b.
Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ABC ,din $C_2A_3 \parallel AC \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{z}{a} \Rightarrow x=\frac{cz}{a}$,din $A_2B_3 \parallel AB \Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{v}{a} \Rightarrow y=\frac{bv}{a}$.
Avem $S_3=\frac{xy\sin A}{2}=\frac{zc}{a}\cdot\frac{bv}{a}\cdot\frac{\sin A}{2}=\frac{zv}{a^2}\cdot S$,analog se obţine $S_1=\frac{xp}{c^2}\cdot S$ şi $S_2=\frac{ty}{b^2}\cdot S$.
Din teorema lui Gergonne în triunghiul ABC cu P aparţine interiorului său rezultă $\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1$ şi notând $\frac{PB_1}{BB_1}=\alpha, \frac{PA_1}{AA_1}=\beta, \frac{PC_1}{CC_1}=\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=1$.
Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ABB_1 ,din $C_2P \parallel AB_1 \Rightarrow \frac{x}{c}=\alpha$.
Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ACB_1 ,din $A_3P \parallel CB_1 \Rightarrow \frac{z}{a}=\alpha$.
Deci $\frac{x}{c}=\frac{z}{a}=\alpha$, analog $\frac{y}{b}=\frac{v}{a}=\gamma$ şi $\frac{p}{c}=\frac{t}{b}=\beta$.
Avem $S \le \frac{(S_1+S_2+S_3)^4}{9S_1S_2S_3} \Leftrightarrow 9S_1S_2S_3S \le (S_1+S_2+S_3)^4 \Leftrightarrow \frac{9xyzpvt}{a^2b^2c^2} \le \left(\frac{zv}{a^2}+\frac{ty}{b^2}+\frac{xp}{c^2}\right)^4 \Leftrightarrow$
$9\alpha^2\beta^2\gamma^2 \le (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^4 \,|\sqrt{(\,)} \Leftrightarrow 3\alpha\beta\gamma \le (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow$
$3\alpha\beta\gamma \le (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \Leftrightarrow 3\alpha\beta\gamma \le (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+2\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$
$\alpha\beta\gamma \le (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta\gamma \le 2(\alpha\beta)^2+2(\beta\gamma)^2+2(\gamma\alpha)^2$.
Folosind inegalitatea $2fg \le f^2+g^2$ obţinem $2\alpha\beta\gamma\beta \le (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2$,
$2\alpha\beta\gamma\gamma \le (\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2$, $2\alpha\beta\gamma\alpha \le (\gamma\alpha)^2+(\alpha\beta)^2$ şi prin însumarea ultimelor trei inegalităţi avem $2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \le 2(\alpha\beta)^2+2(\beta\gamma)^2+2(\gamma\alpha)^2$ şi ţinând cont de α+β+γ=1 obţinem
$2\alpha\beta\gamma \le 2(\alpha\beta)^2+2(\beta\gamma)^2+2(\gamma\alpha)^2$, de unde rezultă $S \le \frac{(S_1+S_2+S_3)^4}{9S_1S_2S_3}$.

2.Avem $54\sqrt{S}(S_1+S_2+S_3)-27\sqrt{S_1S_2S_3}\le 17S\sqrt{S}$

$\Leftrightarrow 54\sqrt{S}\left(\frac{xp}{c^2}S+\frac{ty}{b^2}S+\frac{zv}{a^2}S\right)--27\sqrt{\frac{xptyzv}{c^2b^2a^2}S^3}\le 17S\sqrt{S}\Leftrightarrow$

$54\left(\frac{xp}{c^2}+\frac{ty}{b^2}+\frac{zv}{a^2}\right)-27\sqrt{\frac{xyzptv}{a^2b^2c^2}}\le 17\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 54(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-27\alpha\beta\gamma\le 17$.

Avem $\alpha+\beta+\gamma=1$ şi $\alpha,\beta,\gamma>0\Rightarrow\alpha=1-\beta-\gamma$ şi $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$.

Din $\alpha=1-\beta-\gamma$

$\Rightarrow 54(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-27\alpha\beta\gamma\le 17\Leftrightarrow 27$

$[2(\beta-\beta^2-\beta\gamma+\beta\gamma+\gamma-\gamma\beta--\gamma^2)-\beta\gamma+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2]\le 17\Leftrightarrow 0\le 27$

$\beta^2(2-\gamma)+27\beta(3\gamma-2-\gamma^2)+27(2\gamma^2-2\gamma)+17$

$\Delta_\beta=27[(27\gamma^4+54\gamma^3-81\gamma^2)+(-108\gamma^2+176\gamma-136)]=$

$=27[\gamma^2(27\gamma^2+54\gamma-81)+(-108\gamma^2+176\gamma-136)]=27[\gamma^2f(\gamma)+g(\gamma)]$.

Din $\gamma\in(0,1)\Rightarrow\gamma<1,\ \gamma^2<1\Rightarrow 27\gamma^2+54\gamma<81\Rightarrow 27\gamma^2+54\gamma-81<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\gamma^2(27\gamma^2+54\gamma-81)<0$.

Avem $g(\gamma)=-108\gamma^2+176\gamma-136$, $\Delta_\gamma=-27676,-108<0\Rightarrow g(\gamma)<0,\forall\gamma\in(0,1)$.

Din $\gamma^2(27\gamma^2+54\gamma-81)<0$ şi $g(\gamma)<0,\forall\gamma\in(0,1)\Rightarrow\Delta_\beta<0$ şi împreună cu $2-\gamma<0\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le 27\beta^2(2-\gamma)+27\beta(3\gamma-2-\gamma^2)+27(2\gamma^2-2\gamma)+17\Rightarrow$

$\Rightarrow 54\sqrt{S}(S_1+S_2+S_3)-27\sqrt{S_1S_2S_3}\le 17S\sqrt{S}$.

3.Din AC_2PB_3 paralelogram rezultă $PB_3=AC_2$ şi din BC_3PA_2 paralelogram rezultă $PA_2=BC_3$, de unde avem $AB-C_2C_3=AC_2+BC_3=PB_3+PA_2=B_3A_2$.Analog se deduce $BC-A_2A_3=C_3B_2$ şi $AC-B_2B_3=A_3C_2$.

Di teorema lui Thales în triunghiurile ABA_1 şi ACA_1 deducem $\frac{AP}{AA_1}=\frac{AC_3}{AB}=\frac{AB_2}{AC}$, de unde rezultă $\frac{AP}{AA_1}=\left(\frac{AC_3}{AB}+\frac{AB_2}{AC}\right)$,analog se deduc relaţiile $\frac{BP}{BB_1}=\left(\frac{BC_2}{BA}+\frac{BA_3}{BC}\right)$, $\frac{CP}{CC_1}=\left(\frac{CB_3}{CA}+\frac{CA_2}{CB}\right)$.

Avem $\frac{BA_2+CA_3}{BA_2+CA_3+2A_2A_3}+\frac{CB_2+AB_3}{CB_2+AB_3+2B_2B_3}+\frac{AC_2+BC_3}{AC_2+BC_3+2C_2C_3}=$

$=\frac{BC-A_2A_3}{BC+A_2A_3}+\frac{AC-B_2B_3}{AC+B_2B_3}+\frac{AB-C_2C_3}{AB+C_2C_3}=\frac{C_3B_2}{BC+A_2A_3}+\frac{A_3C_2}{AC+B_2B_3}+\frac{B_3A_2}{AB+C_2C_3}\ge$

$\ge\frac{C_3B_2}{BC}+\frac{A_3C_2}{AC}+\frac{B_3A_2}{AB}=\frac{AP}{AA_1}+\frac{BP}{BB_1}+\frac{CP}{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC_3}{AB}+\frac{AB_2}{AC}+\frac{BC_2}{BA}+\frac{BA_3}{BC}+\frac{CB_3}{CA}+\frac{CA_2}{CB}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{AC_3+BC_2}{AB}+\frac{BA_3+CA_2}{BC}+\frac{AB_2+CB_3}{CA}\right)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AB}+\frac{BC}{BC}+\frac{AC}{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$, de unde rezultă

$\frac{BA_2+CA_3}{BA_2+CA_3+2A_2A_3}+\frac{CB_2+AB_3}{CB_2+AB_3+2B_2B_3}+\frac{AC_2+BC_3}{AC_2+BC_3+2C_2C_3}\ge\frac{3}{2}$.

2. Prof. Ioan Viorel Codreanu, Şcoala Gimnazială Satulung, Maramureş

Fie $\frac{AP}{PA_1}=x,\frac{BP}{PB_1}=y,\frac{CP}{PC_1}=z$, x,y,z sunt numere reale pozitive. Avem

$$\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{1}{x+1},\frac{PB_1}{BB_1}=\frac{1}{y+1},\frac{PC_1}{CC_1}=\frac{1}{z+1}$$

şi aplicând Teorema lui Gergonne, în triunghiul ABC, pentru dreptele AA_1, BB_1, CC_1 concurente în P, obţinem

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1$$

sau

$$\sum \frac{1}{x+1}=1 \qquad (1)$$

ce se poate scrie

$$\sum x+2=\prod x \qquad (2)$$

sau

$$\sum (x+1)(y+1)=\prod (x+1) \qquad (3)$$

Din $PA_2 \parallel AB$ rezultă $\angle PA_2A_3 \equiv \angle ABC$ (corespondente). Analog $\angle PA_3A_2 \equiv \angle ACB$.

Atunci $\Delta ABC \sim \Delta PA_2A_3$ de unde obţinem

$$\frac{A_2A_3}{BC}=\frac{PA_3}{AC}=\frac{PA_2}{AB}.$$

Din $PA_3 \parallel AC$ aplicând Teorema fundamentală a asemănării, în ΔAA_1C, obţinem $\Delta A_1PA_3 \sim \Delta A_1AC$ de unde

$$\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{PA_3}{AC}$$

şi ţinând cont de faptul că PB_3CA_3 este paralelogram (are laturile opuse paralele), deci $PA_3=B_2C$, obţinem

$$\frac{A_2A_3}{BC}=\frac{B_2C}{AC}=\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{1}{x+1}. \text{ Analog } \frac{A_3C}{BC}=\frac{B_2B_3}{AC}=\frac{1}{y+1}.$$

Acum

$$\frac{S_1}{S}=\frac{\frac{B_2C\cdot A_3C\cdot \sin C}{2}}{\frac{AC\cdot AB\cdot \sin C}{2}}=\frac{B_2C}{AC}\cdot\frac{A_3C}{BC}=\frac{1}{(x+1)(y+1)}$$

sau

$$S_1 = \frac{S}{(x+1)(y+1)}. \text{ Analog } S_2 = \frac{S}{(x+1)(z+1)}, S_3 = \frac{S}{(y+1)(z+1)}.$$

Atunci

$$\sum S_1 = S\sum \frac{1}{(x+1)(y+1)} = S \cdot \frac{\sum (x+1)}{\prod (x+1)} \qquad (4)$$

şi

$$\prod S_1 = \frac{S^3}{\left(\prod (x+1)\right)^2} \qquad (5).$$

Avem

$$\frac{BA_2 + CA_3}{BA_2 + CA_3 + 2A_2A_3} = \frac{BC - A_2A_3}{BC + A_2A_3} = \frac{BC\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}{BC\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)} = \frac{x}{x+2} \text{ şi analoagele.}$$

Atunci

$$\sum \frac{BA_2 + CA_3}{BA_2 + CA_3 + 2A_2A_3} = \sum \frac{x}{x+2} \qquad (6).$$

1. Folosind (4) şi (5) inegalitatea $S \le \frac{\left(\sum S_1\right)^4}{9\prod S_1}$ este echivalentă cu $\left(\sum (x+1)\right)^2 \ge 3\prod (x+1)$

care ţinând cont de (3) devine $\left(\sum (x+1)\right)^2 \ge 3\sum (x+1)(y+1)$ aceasta pentru

$a = x+1, b = y+1, c = z+1$ fiind cunoscuta inegalitate $\left(\sum a\right)^2 \ge 3\sum ab$ echivalentă cu

$\sum (a-b)^2 \ge 0$ şi demonstraţia se încheie.

Egalitatea are loc pentru $x = y = z = 2$, adică atunci când P este centrul de greutata al triunghiului ABC .

2. Folosind din nou (4) şi (5) inegalitatea $54\sqrt{S}\sum S_1 - 27\sqrt{\prod S_1} \le 17S\sqrt{S}$ este echivalentă

cu $54\sum (x+1) - 27 \le 17\prod (x+1)$ (7).

Ţinând cont de (2) avem

$$\prod (x+1) = \prod x + \sum xy + \sum x + 1 = 2\sum x + \sum xy + 3 \qquad (8).$$

Acum folosind (8) inegalitatea (7) este echivalentă cu

$$20\sum x+84\le 17\sum xy \qquad (9).$$

Vom demonstra inegalitatea (9) prin intercalare, arătând că au loc inegalităţile

$$\sum xy\ge 2\sum x \qquad (10)$$

şi

$$\sum x\ge 6 \qquad (11).$$

Notăm $\frac{1}{x+1}=m,\frac{1}{y+1}=n,\frac{1}{z+1}=p$ şi din (1) avem $m+n+p=1$.

Atunci

$$x=\frac{1-m}{m}=\frac{n+p}{m},\ y=\frac{m+p}{n},\ z=\frac{m+n}{p} \qquad (12)$$

şi

$$\sum xy\ge 2\sum x\Leftrightarrow \sum\frac{n+p}{m}\cdot\frac{m+p}{n}\ge 2\sum\frac{n+p}{m}\Leftrightarrow \sum m^3+3\prod m\ge\sum mn(m+n)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum m(m-n)(m-p)\ge 0$$

care este exact Inegalitatea Schur.

Inegalitatea $\sum x\ge 6$ se arată uşor pornind de la inegalitatea

$$\left(\sum(x+1)\right)\left(\sum\frac{1}{x+1}\right)\ge 9$$

şi ţinând cont de (1), adică $\sum\frac{1}{x+1}=1$, obţinem

$$\sum x\ge 6.$$

Acum folosind (10) şi (11) avem

$$17\sum xy\ge 34\sum x=20\sum x+14\sum x\ge 20\sum x+84$$

şi inegalitatea (9) este demonstrată.

3. Folosind (6) şi substituţiile (12) avem

$$\sum\frac{BA_2+CA_3}{BA_2+CA_3+2A_2A_3}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{x}{x+2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{1-m}{m+1}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sum\frac{1}{m+1}-3\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{m+1}\ge\frac{9}{4}.$$

Din $\left(\sum \frac{1}{m+1}\right)\left(\sum (m+1)\right) \geq 9$ şi $\sum m = 1$ deducem că $\sum \frac{1}{m+1} \geq \frac{9}{4}$. Pentru cele trei inegalităţi din enunţul problemei, egalitatea se obţine pentru $x = y = z = 2$, adică atunci când P este centrul de greutate al triunghiului ABC.