Revista Electronică MateInfo.ro
MAI 2011

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

1. APLICAŢII ALE **A**NALIZEI MATEMATICE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAŢIU Pag.2

2. Solutions for the problems J217, J218, J219 and J221 from Mathematical Reflections – Issue 1, 2012 Pag. 6

3. Solutions of the problems 5185 and 5186 from The School Science and Mathematics Journal (posted in December 2011 other than solutions from March 2012) Pag. 8

4. Problema lunii mai 2011(soluţii) Pag. 10

Coordonator prof. Andrei Octavian Dobre
E-mail: *office@mateinfo.ro*
dobre.andrei@yahoo.com

1.APLICAŢII ALE ANALIZEI MATEMATICE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAŢIU (8)

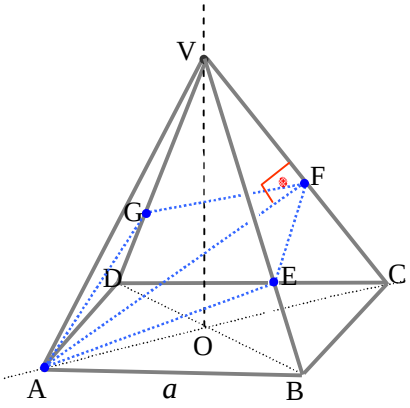
Prof. Poenaru Dan, Colegiul Economic „I.Pop” Cluj-Napoca

Aplicaţie

Se dă piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu latura bazei $AB = a$ având înălţimea OV de lungime variabilă $(AC \cap BD = O)$.

Se consideră secţiunea în piramidă determinată de un plan α ce trece prin punctual A şi este perpendicular pe muchia CV; fie şi $BV \cap \alpha = E$, $DV \cap \alpha = G$ şi $CV \cap \alpha = F$.

Se cere studiul variaţiei volumului piramidei $CAEFG$ în condiţiile date.



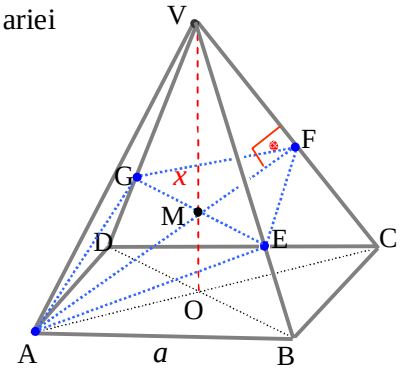
SOLUŢIE: Notăm $OV = x$ (lungimea variabilă a înălţimii piramidei).

Mai întâi $AF, VO \subset (ACV)$ deci AF şi VO sunt concurente; fie $M = AF \cap VO$

De asemenea $M \in (AEG)$ şi $M \in (VDB) \Rightarrow M \in (AEG) \cap (VDB) = GE$.

Din $M \in AF$, $M \in VO$ şi $M \in GE \Rightarrow M = AF \cap VO \cap GE$.

Se demonstrează uşor că secţiunea este un patrulater compus din două triunghiuri isoscele de baza comună (GE); astfel $AF \perp GE$ şi deci patrulaterul $AEFG$ este ortodiagonal ceea ce permite un calcul convenabil al ariei



şi anume $A_{AEFG} = \dfrac{AF \cdot GE}{2}$

Din $CF \perp (AEF) \Rightarrow$ CF este înălţimea piramidei $CAEFG$ şi astfel volumul este

$$V_{CAEFG} = \frac{A_{AEFG} \cdot CF}{3}$$

Din triunghiul dreptunghic VOC se obţine

$$CV = \sqrt{VO^2 + OC^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x^2 + a^2}}{\sqrt{2}}$$

Calculând aria triunghiului VAC în două moduri se obţine $AF = \dfrac{2ax}{\sqrt{2x^2+a^2}}$

Din triunghiul dreptunghic AFC se calculează

$$CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2ax}{\sqrt{2x^2+a^2}}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+a^2}}$$

Din asemănarea triunghiurilor AOM şi $AFC \Rightarrow \dfrac{OM}{CF} = \dfrac{AO}{AF} \Rightarrow OM = \dfrac{a^2}{2x}$

Din asemănarea triunghiurilor VGE şi $VDB \Rightarrow \dfrac{GE}{DB} = \dfrac{VM}{VO} \Rightarrow GE = \dfrac{a\sqrt{2}(2x^2-a^2)}{2x^2}$

Tecem la calculul ariei bazei

$$A_{AEFG} = \frac{AF \cdot GE}{2} = \frac{\dfrac{2ax}{\sqrt{2x^2+a^2}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}(2x^2-a^2)}{2x^2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}(2x^2-a^2)}{2x\sqrt{2x^2+a^2}}$$

În final volumul este

$$V_{CAEFG} = \frac{A_{AEFG} \cdot CF}{3} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{2}(2x^2-a^2)}{2x\sqrt{2x^2+a^2}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+a^2}}}{3} = \frac{a^4}{3} \cdot \frac{2x^2-a^2}{x(2x^2+a^2)}$$

Pentru fluidizarea calculelor în studiul propus, vom considera în continuare cazul particular $a = 2$, astfel volumul aferent devine:

$$V_{CAEFG} = \frac{16}{3} \cdot \frac{2x^2-4}{x(2x^2+4)} = \frac{16}{3} \cdot \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}$$

Remarcăm faptul că pentru $x \in (0, \sqrt{2})$ triunghiul AVC este obtuzunghic iar secţiunea se reduce la punctul A, de aceea vom considera $x \geq \sqrt{2}$ şi astfel se poate construi funcţia:

$$f : [\sqrt{2}, +\infty) \to R, \quad f(x) = \frac{16}{3} \cdot \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}$$

Preliminarii în trasarea graficului: $f(\sqrt{2})=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală.

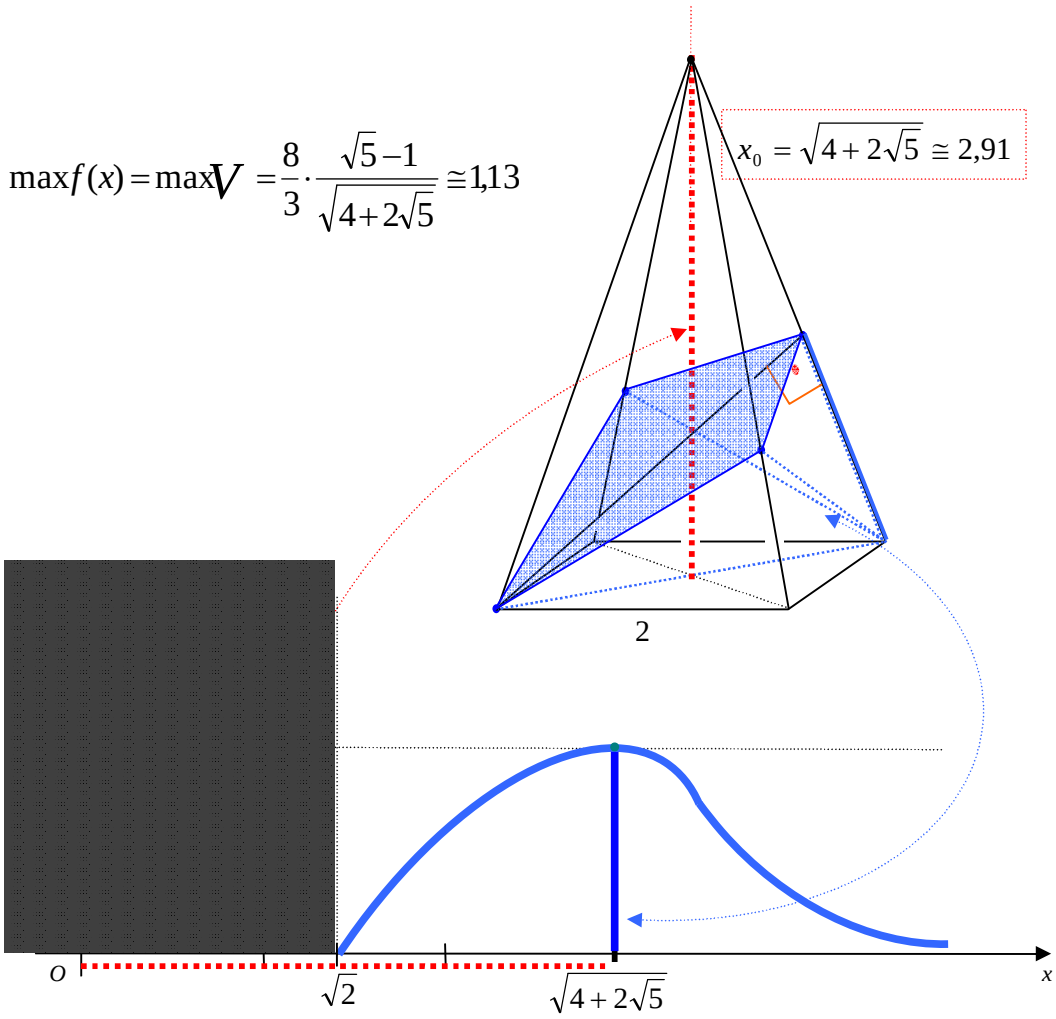
Derivata funcţiei este: $f'(x)=\frac{16}{3}\cdot\frac{-x^4+8x^2+4}{(x^3+2x)^2}$; Ecuaţia derivatei $f'(x)=0$ conduce la soluţia $x_0=\sqrt{4+2\sqrt{5}}\cong 2{,}91$ şi $f(x_0)=\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}\cong 1{,}13$.

Deasemenea pentru stabilirea semnului derivatei putem aduce expresia derivatei la forma: $f'(x)=\frac{16}{3}\cdot\frac{(-x^2+4+2\sqrt{5})(x^2+2\sqrt{5}-4)}{(x^3+2x)^2}$; se poate observa că semnul derivatei este determinat doar de semnul primei paranteze de la numărător deoarece toţi ceilalţi factori sunt pozitivi .

Tabloul de variaţie:

x	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4+2\sqrt{5}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - - - - -
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$f\left(\sqrt{4+2\sqrt{5}}\right)$	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ 0

$$\max f(x) = \max V = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}} \cong 1{,}13$$



2. Solutions for the problems J217, J218, J219 and J221 from Mathematical Reflections – Issue 1, 2012

By Titu Zvonaru, Comănești, Romania
and Neculai Stanciu, Buzău, Romania

J217. If a, b, c are integers such that $a^2+2bc=1$ and $b^2+2ca=2012$, find all possible values of c^2+2ab.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

We solve in integers the system of equations:

$$\begin{cases} a^2+2bc=1 \\ b^2+2ca=2012 \end{cases}$$

By subtracting we obtain that: $(a-b)(a+b-2c)=-2011$, but because 2011 is prime number we have four cases:

i) $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b-2c=2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+1 \\ 2a+1-2c=2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+1 \\ c=a-1005 \end{cases}$,

and the equation $a^2+2bc=1$ becomes:

$a^2+2(a+1)(a-1005)-1=0 \Leftrightarrow 3a^2-2\cdot 1004\cdot a-2011=0$,

$a_{1,2}=\dfrac{1004\pm 1007}{3}$, which yields: $a=-1, b=0, c=-1006$.

ii) $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b-2c=-2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-1 \\ c=a+1005 \end{cases}$, and the equation $a^2+2bc=1$ becomes:

$a^2+2(a-1)(a+1005)-1=0 \Leftrightarrow 3a^2+2\cdot 1004a-2011=0$,

$a_{1,2}=\dfrac{-1004\pm 1007}{3}$, which yields: $a=1, b=0, c=1006$.

iii) $\begin{cases} a-b=2011 \\ a+b-2c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-2011 \\ c=a-1005 \end{cases}$, and the equation $a^2+2bc=1$ becomes:

$a^2+2(a-2011)(a-1005)-1=0 \Leftrightarrow 3a^2-2\cdot 3016a+4042109=0$, which has not real solutions.

iv) $\begin{cases} a-b=-2011 \\ a+b-2c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2011 \\ c=a+1005 \end{cases}$, and we obtain the equation:

$3a^2+2\cdot 3016a+4042109=0$, which has not real solutions.

From the above we obtain that: $c^2+2ab=1006^2$.

J218. Prove that in any triangle with sides of lenghts a, b, c, circumradius R, and inradius r, the following inequality holds

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c-a}+\frac{\sqrt{ca}}{c+a-b}\le 1+\frac{R}{r}.$$

Proposed by Cezar Lupu, University of Pittsburgh, USA, and Virgil Nicula, Bucharest, Romania

Solution:

Let s be the semiperimeter and S be the area of the given triangle.

We denote: $s-a=\frac{x}{2}, s-b=\frac{y}{2}, s-c=\frac{z}{2}$ and we have:

$$a=\frac{y+z}{2}, b=\frac{z+x}{2}, c=\frac{x+y}{2}, s=\frac{x+y+z}{2}.$$

With well-knows relations we deduce that:

$$\frac{R}{r}=\frac{abcs}{4S^2}=\frac{abc}{4(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}$$

$$=\frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz}{4xyz}=\frac{1}{2}+\frac{x+y}{4z}+\frac{y+z}{4x}+\frac{z+x}{4y}.$$

From above and by AM-GM inequality we obtain that:

$$1+\frac{R}{r}=\frac{3}{2}+\sum_{cyc}\frac{x+y}{4z}=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{2}+\frac{x+y}{4z}\right)=\sum_{cyc}\frac{(x+z)+(y+z)}{4z}\geq$$

$$\geq\sum_{cyc}\frac{2\sqrt{(x+z)(y+z)}}{4z}=\sum_{cyc}\frac{2\sqrt{2a\cdot 2b}}{8(s-c)}=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}}{2(s-c)}=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}$$, and the proof is complete.

We have equality if and only if $a=b=c$.

J219. Trying to solve a problem, Jimmy used the following "formula": $\log_{ab}x=\log_a x\log_b x$, where a, b, x are positive real numbers different from 1. Prove that this is correct only if x is a solution to the equation $\log_a x+\log_b x=1$.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

We have:

$$\log_{ab}x=\log_a x\log_b x\Leftrightarrow\frac{1}{\log_x ab}=\log_a x\log_b x\Leftrightarrow\frac{1}{\log_x a+\log_x b}=\log_a x\log_b x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}}=\log_a x\log_b x\Leftrightarrow\frac{\log_a x\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_a x\log_b x\Leftrightarrow\log_a x+\log_b x=1$$, and we are done.

J221. Solve in integers the system of equations

$$xy-\frac{z}{3}=xyz+1$$
$$yz-\frac{x}{3}=xyz-1$$
$$zx-\frac{y}{3}=xyz-9.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

First we note that x, y and z are divisible by 3.
From the first two equations (by subtracting) we obtain that:
$y(x-z)+\frac{x-z}{3}=2 \Leftrightarrow (3y+1)(x-z)=6$, so we have:
$3y+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Rightarrow 3y+1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
It works $3y+1=1$ and $3y+1=-2$, but because y is divisible by 3 we obtain only $y=0$.
From the first two equations we obtain $x=3, y=0, z=-3$ which verify the third equation.

3. Solutions of the problems 5185 and 5186 from The School Science and Mathematics Journal (posted in December 2011 other than solutions from March 2012)

By Neculai Stanciu, Buzău, Romania
and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania

- **5185:** *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain*

Calculate, without using a computer, the value of

$$\sin\left[\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+\arctan\left(\frac{1}{11}\right)+\arctan\left(\frac{1}{13}\right)+\arctan\left(\frac{111}{121}\right)\right].$$

Solution:
We denote:
$$\sin\left[\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+\arctan\left(\frac{1}{11}\right)+\arctan\left(\frac{1}{13}\right)+\arctan\left(\frac{111}{121}\right)\right]$$
with k.
First step. We use the well-known formula:

$$\arctan\alpha+\arctan\beta=\arctan\left(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right), \text{ where } \alpha\beta<1.$$

We have:

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\frac{4}{7}, \arctan\left(\frac{1}{7}\right)+\arctan\left(\frac{1}{13}\right)=\arctan\frac{2}{9},$$

$$\arctan\left(\frac{1}{11}\right)+\arctan\left(\frac{111}{121}\right)=\arctan\frac{671}{610}.$$

and,

$$\arctan\left(\frac{4}{7}\right)+\arctan\left(\frac{2}{9}\right)=\arctan\frac{10}{11}.$$

Second step. We use the well-known formula:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a.$$

Then, we have by first step that

$$k=\sin\left(\arctan\frac{10}{11}+\arctan\frac{671}{610}\right)=\sin\left(\arctan\frac{10}{11}\right)\cos\left(\frac{671}{610}\right)+\sin\left(\arctan\frac{671}{610}\right)\cos\left(\arctan\frac{10}{11}\right)$$

Third step. We use the well-known formulas:

$$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \text{ and, }\ \cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Then, we have by second step that

$$\begin{aligned}k&=\frac{\frac{10}{11}}{\sqrt{1+\left(\frac{10}{11}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{671}{610}\right)^2}}+\frac{\frac{671}{610}}{\sqrt{1+\left(\frac{671}{610}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{10}{11}\right)^2}}\\&=\frac{10}{11}\cdot\frac{11\cdot 610}{\sqrt{181737361}}+\frac{671}{610}\cdot\frac{11\cdot 610}{\sqrt{181737361}}\\&=\frac{6100}{13481}+\frac{7381}{13481}\\&=1.\end{aligned}$$

- **5186:** *Proposed by John Nord, Spokane, WA*

  Find k so that $\int_0^k\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^n dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^n dx.$

Solution:

We denote $F(x)=\int\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^n dx$, and we make the change $t=-\frac{b}{a}x+b\Rightarrow -\frac{b}{a}dx=dt$, so we have:

$$F(x)=\int\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^n dx=-\frac{a}{b}\int t^n dt=-\frac{a}{b}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}+cons\tan t=-\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^{n+1}+cons\tan t.$$

Therefore:

$$F(x)\Big|_0^k=\frac{1}{2}F(x)\Big|_0^a$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(-\frac{bk}{a}+b\right)^{n+1}-b^{n+1}\right]=\frac{1}{2}\left(-b^{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{bk}{a}+b\right)^{n+1}=\frac{b^{n+1}}{2}.$$

For

- $n=even$, we obtain that $k=a\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{2}-1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)$, and for
- $n=odd$, we obtain that $k=a\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{2}-1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)$, or $k=a\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{2}+1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)$.

4. PROBLEMA LUNII APRILIE 2011

Un hexagon înscris într-un cerc de rază r are două laturi de lungime a, două laturi de lungime b şi două laturi de lungime c. Să se demonstreze că:

$$4r^3 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) r + abc \ .$$

Prof. Corneliu Mănescu-Avram

Soluţie autor : Fie $ABCDEF$ hexagonul înscris în cercul de centru O şi de rază r. Păstrând cercul fix, putem schimba ordinea laturilor hexagonului, deoarece arcele corespunzătoare au aceeaşi lungime. Considerăm deci $AB = DE = a,\ BC = EF = b,\ CD = FA = c.$

Din motive de simetrie avem

$$AD = BE = CF = 2r,\quad AC = DF = x,\quad BD = EA = y,\ \text{unde}\ x, y \in (0, 2r).$$

Se aplică teorema lui *Ptolemeu* în patrulaterele inscriptibile *ABCD, ABDE, ACDF* :

$$xy = 2br + ac,\quad 4r^2 = y^2 + a^2,\quad 4r^2 = x^2 + c^2.$$

Se elimină x, y şi se obţine

$$\left(4r^2 - a^2\right)\left(4r^2 - c^2\right) = \left(2br + ac\right)^2.$$

După efectuarea calculelor rezultă egalitatea din enunţ.

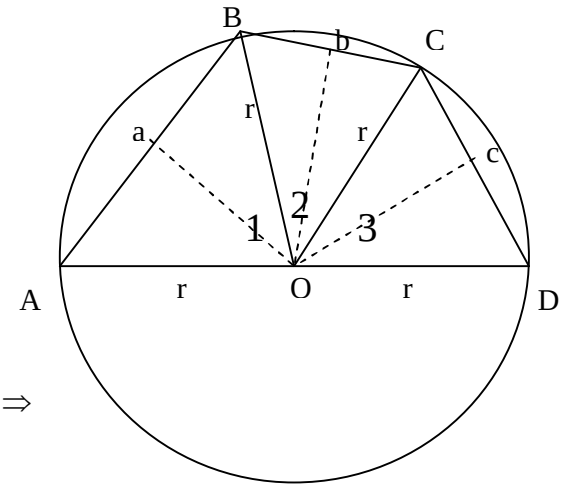
Notă. Pentru cazul particular $a = 1,\ b = 2,\ c = 3,$ problema a fost propusă la Olimpiada Nordică din 1993, dar soluţia dată de autor este trigonometrică.

Alte solutii:

1. Profesor Laura Radu, Colegiul de Industrie Alimentară „Elena Doamna”, Galaţi

Unind centrul cercului cu fiecare vârf al hexagonului se obţin trei perechi de triunghiuri congruente.

Atunci unghiurile din jurul punctului O sunt câte două congruente. Ştiind că cele şase unghiuri au împreună 360° şi considerând că $\angle O_1 \equiv \angle O_4$, $\angle O_2 \equiv \angle O_5$, $\angle O_3 \equiv \angle O_6$, atunci $m(\angle O_1)+m(\angle O_2)+m(\angle O_3)=180^\circ$.



Fără a restrânge generalitatea putem desena cele trei triunghiuri diferite ca în figura alăturată.
Aplicând teorema cosinusului în cele trei triunghiuri, obţinem:

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos O_1$$
$$b^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos O_2$$
$$c^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos O_3 .$$

Adunăm cele trei relaţii şi avem:

$$a^2+b^2+c^2 = 6r^2 - 2r^2(\cos O_1 + \cos O_2 + \cos O_3) \Rightarrow$$
$$a^2+b^2+c^2 = 6r^2 - 2r^2(1+4\sin\frac{O_1}{2}\sin\frac{O_2}{2}\sin\frac{O_3}{2}).$$

În fiecare din cele trei triunghiuri , care sunt triunghiuri isoscele, ducem înălţimile din O şi aplicăm sinusurile unghiurilor $\frac{O_1}{2}$, $\frac{O_2}{2}$, $\frac{O_3}{2}$.

Avem: $a^2+b^2+c^2 = 6r^2 - 2r^2(1+4\cdot\frac{a}{2r}\cdot\frac{b}{2r}\cdot\frac{c}{2r}) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 4r^2 - 8r^2\frac{abc}{8r^3} \Rightarrow$

$$a^2+b^2+c^2 = 4r^2 - \frac{abc}{r} \Rightarrow r(a^2+b^2+c^2) = 4r^3 - abc \Rightarrow$$
$$4r^3 = (a^2+b^2+c^2)r + abc .$$

În demonstraţie am folosit următoarea identitate:

$$\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \text{ unde } A+B+C=\pi .$$

Justificare: $\cos A+\cos B+\cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} =$

$$= 2\cos\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\right)+1 = 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1 =$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1 = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

2. Prof. Opriţă Elena, Grupul Şcolar "Al. Vlahuţă" Şendriceni, Botoşani

Notăm cu α măsura unghiului la centru determinat de capetele coardei de lungime a, cu β măsura unghiului la centru determinat de capetele coardei de lungime b şi γ măsura unghiului la centru determinat de capetele coardei de lungime c. Din faptul că laturile hexagonului sunt congruente două câte două congruente rezultă că $\alpha+\beta+\gamma=180^0$. Deci

patrulaterul $ABCD$ care are laturile $AB=a, BC=b, CD=c$ şi respectiv $AD=2r$ este înscris în cercul de rază r şi centru O.

Aplicăm teorema lui Ptolemeu pentru patrulaterul $ABCD$ inscriptibil avem:

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

$$AC\cdot BD=ac+2rb\,(1)$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OAC$ obţinem:

$$\cos\alpha=\frac{2r^2-a^2}{2r^2},\quad \cos\beta=\frac{2r^2-b^2}{2r^2},\quad \cos\gamma=\frac{2r^2-c^2}{2r^2}.$$

În triunghiurile $\triangle AOC, \triangle COD$ aplicăm teorema cosinusului şi obţinem:

$$AC^2=2r^2-2r^2\cos(\alpha+\beta)\,(2)$$

$$BD^2=2r^2-2r^2\cos(\beta+\gamma)\,(3).$$

Scriem relaţia (1) sub forma:

$$AC^2\cdot BD^2=(ac+2rb)^2\,(4)$$

Înlocuind în relaţia (4) relaţiile (2) şi (3), obţinem (după ce aducem la forma cea mai simplă) relaţia cerută

$$4r^3=\left(a^2+b^2+c^2\right)r+abc$$

3. Prof. Codreanu Ioan Viorel, Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Fie x,y,z măsurile arcelor corespunzătoare coardelor de lungimi $a,b,$ respectiv c. Din teorema cosinusului avem $a^2=r^2+r^2-2r^2\cos x$, după care

$$a^2=2r^2(1-\cos x)=4r^2\sin^2\frac{x}{2}$$ și analoagele.

Evident $x+y+z=180^\circ$,și în acest caz $\sum\cos x=1+4\prod\sin\frac{x}{2}$. Au loc următoarele echivalențe ce încheie soluția problemei

$$4r^3=r\sum a^2+\prod a\Leftrightarrow 4r^3=2r^3\sum(1-\cos x)+8r^3\prod\sin\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2=3-\sum\cos x+4\prod\sin\frac{x}{2}\Leftrightarrow\sum\cos x=1+4\prod\sin\frac{x}{2}.$$

4. Prof. Antonie Mihaela Rodica, Colegiul National Traian, Drobeta Turnu-Severin

Fie ABCDEF hexagonul inscris in cercul de centru O si raza r.Daca AB este o latura cu lungimea a notam cu x masura arcului AB ; x=m($A\hat{O}B$)=2m($A\hat{C}B$) ;analog notam cu y si z

masurile arcelor subintinse de laturile cu lungimile egale cu b respective c.Aplicand teorema cosinusului in ΔAOB obtinem $a^2=r^2+r^2-2r^2\cos x$;analog in triunghiurile cu laturile r,r,b,respectiv r,r,c avem $b^2=2r^2-2r^2\cos y$, $c^2=2r^2-2r^2\cos z$.
Adunam cele trei relatii si obtinem $a^2+b^2+c^2=6r^2-2r^2(\cos x+\cos y+\cos z)$ (1)
Deoarece hexagonul are cate doua laturi cu lungimile a,b,c rezulta ca cercul circumscris este format din sase arce cu masurile:x,x,y,y,z,z(nu conteaza ordinea),deci $2x+2y+2z=360^0$,$x+y+z=180^0$.

$\cos x+\cos y+\cos z=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos z=2\cos\frac{\pi-z}{2}\cos\frac{x-y}{2}+1-2\sin^2\frac{z}{2}=$

$1+2\sin\frac{z}{2}(\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{z}{2})=1+4\sin\frac{z}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}$ (2)

Inlocuind relatia (2) in (1) obtinem $a^2+b^2+c^2=6r^2-2r^2(1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2})$ adica

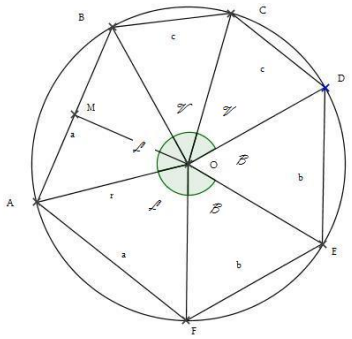
$a^2+b^2+c^2=4r^2-8r^2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$.Inmultim relatia cu r si obtinem

$r(a^2+b^2+c^2)=4r^3-8r^3\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$ (3)

In ΔABC aplicam teorema sinusului: $\frac{a}{\sin(A\hat{C}B)}=2r\Rightarrow\frac{a}{\sin\frac{x}{2}}=2r$,de unde $2r\sin\frac{x}{2}=a$

ai analog $2r\sin\frac{y}{2}=b$,$2r\sin\frac{z}{2}=c$,relatii care inlocuite in relatia (3) ne conduce la $r(a^2+b^2+c^2)=4r^3-abc$,de unde concluzia $4r^3=r(a^2+b^2+c^2)+abc$.

5. Prof. HRIȚCU CRISTIAN, Grupul Școlar „Regina Maria” Dorohoi, Jud. Botoșani



Din suma unghiurilor in jurul unui punct avem:
$2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ \overset{/2}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta+\gamma=180^\circ$
Din teorema cosinusului:
$a^2=r^2+r^2-2r^2\cos\alpha,\ \alpha<180^\circ$
$b^2=r^2+r^2-2r^2\cos\beta,\ \beta<180^\circ$
$c^2=r^2+r^2-2r^2\cos\gamma,\ \gamma<180^\circ$
De aici vom avea:
$a^2=2r^2(1-\cos\alpha)$,$\alpha<180^\circ$
$b^2=2r^2(1-\cos\beta)$,$\beta<180^\circ$
$c^2=2r^2(1-\cos\gamma)$,$\gamma<180^\circ$
Prin însumare:
$a^2+b^2+c^2=2r^2(3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)=2r^2[3-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]$(1)
Dar $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2},\forall\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{R}$,
identitate ce se găsește în manualul de matematică, clasa a-IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, 2004. Atunci:

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos 180^\circ=4\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{180^\circ-\beta}{2}\cos\frac{180^\circ-\alpha}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+(-1)=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

În ΔAOM, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{r}$, deci $a=2r\sin\frac{\alpha}{2}$. Analog $b=2r\sin\frac{\beta}{2}, c=2r\sin\frac{\gamma}{2}$. Atunci

$abc=8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.(2)

Din (1), (2) vom avea :

$(a^2+b^2+c^2)r+abc=2r^3\left[3-\left(1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right]+8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow$

$(a^2+b^2+c^2)r+abc=2r^3\left(2-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)+8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow$

$(a^2+b^2+c^2)r+abc=4r^3-8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow$

$4r^3=(a^2+b^2+c^2)r+abc$, q.e.d

6. Prof.Oláh Csaba, Grup Şcolar „Liviu Rebreanu”, Bălan

Se observă că hexagonul se descompune in şase triunghiuri isoscele – trei perechi de triunghiuri congruente, cu bazele de lungimi a,b si c şi cu laturi de lungimea razei cercului circumscris. Dacă notăm cu α,β si γ măsurile unghiurilor determinate de cele două raze în triunghiurile cu bazele a,b,c putem scrie: $2(\alpha+\beta+\gamma)=2\pi\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (*).

Calculăm cosinusurile acestor unghiuri cu ajutorul laturilor: $a^2=r^2+r^2-2r\cdot r\cdot\cos\alpha$, de unde $\cos\alpha=\frac{2r^2-a^2}{2r^2}=1-\frac{a^2}{2r^2}$. În mod similar $\cos\beta=1-\frac{b^2}{2r^2}$ şi $\cos\gamma=1-\frac{c^2}{2r^2}$ (**)

Calculăm suma acestor cosinusuri:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\overbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\overset{(*)}{=}\frac{\pi-\gamma}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\underbrace{\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}_{=\sin\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}+1=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)+1\overset{\gamma=\pi-(\alpha+\beta)}{=}2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1=$$

$$=4\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\overbrace{\frac{a+\beta}{2}}^{=\beta}-\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\cdot\sin\frac{\overbrace{\frac{a+\beta}{2}}^{=\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}+1=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1\ .$$

Înălţimile aferente laturilor cu lungimile a,b,c în triunghiurile mai sus amintite înjumătăţesc unghiurile α,β si γ (este vorba de triunghiuri isoscele).

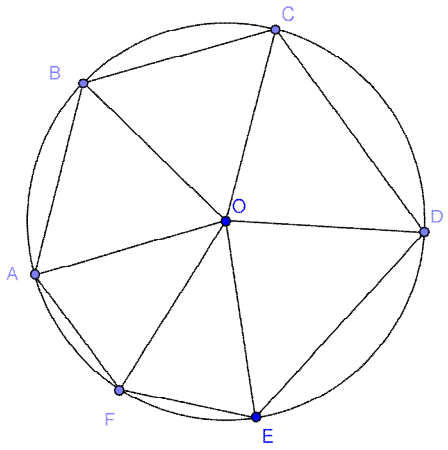
Atunci $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{r}=\frac{a}{2r}$, în mod similar $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{b}{2r}$ şi $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{c}{2r}$ (***).

Înlocuim rezultatele din (**) şi (***) în relaţia $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1$, şi obţinem:

$$\cancel{1}-\frac{a^2}{2r}+1-\frac{b^2}{2r}+1-\frac{c^2}{2r}=4\cdot\frac{a}{2r}\cdot\frac{b}{2r}\cdot\frac{c}{2r}+\cancel{1}\Leftrightarrow 2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2r}=\frac{abc}{2r^3}\Big|\cdot 2r^3\Leftrightarrow$$

$4r^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)r^2=abc$ adică $4r^3=\left(a^2+b^2+c^2\right)r^2+abc$ ce trebuia demonstrat.

7. Prof. Păcurar Cornel Cosmin , Col . Naţ . "I.M. Clain " , Blaj

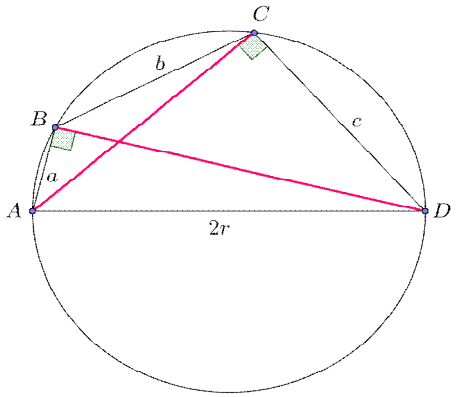


Soluție:Fără arestrânge generalitatea rezolvării considerăm hexagonul ABCDEF înscris în cercul $\mathcal{C}(O,r)$, cu AB=BC=a,CD=DE=b,EF=FA=c.(Celelalte cazuri se tratează analog).
Din ABCDEF înscris în cercul $\mathcal{C}(O,r)$ rezultă OA=OB=OC=OD=OE=OF=r.
Din OA=OB,OB=OC,AB=BC rezultă ΔAOB≡ΔBOC, de unde rezultă m$(\measuredangle AOB)$=m$(\measuredangle BOC)$=α.
Analog m$(\measuredangle COD)$=m$(\measuredangle DOE)$=β și m$(\measuredangle EOF)$=m$(\measuredangle FOA)$=γ.
Din $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOE$, $\measuredangle EOF$, $\measuredangle FOA$ unghiuri în jurul unui punct rezultă 2α+2β+2γ=2π, de unde rezultă α+β+γ=π.
Aplicând teorema cosinusului în ΔAOB obținem $a^2=2r^2(1-\cos\alpha)$, analog obținem $b^2=2r^2(1-\cos\beta)$ și $c^2=2r^2(1-\cos\gamma)$.Ținând cont de ultimele trei relații avem
$4r^3=(a^2+b^2+c^2)r+abc$ echivalent cu
$4r^3=2r^3(3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)+\sqrt{8r^6(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}$,
echivalet cu $4r^3=2r^3(3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)+2r^3\sqrt{2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}$,
echivalent cu $2=3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma+\sqrt{2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}$,echivalent cu
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=\sqrt{2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}$,echivalent cu
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\pi-(\alpha+\beta))-1=\sqrt{2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\left(1-\cos(\pi-(\alpha+\beta))\right)}$,echivalent cu
$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1=\sqrt{2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1+\cos(\alpha+\beta))}$,echivalent cu
$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$,echivalent cu
$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cdot\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|$,echivalent cu
$-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{-\beta}{2}=4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,echivalent cu $4\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, care este evident, și de aici rezultă inegalitatea din enunț.
Am folosit formulele $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $1-\cos 2x=2\sin^2 x$,
$1+\cos 2x=2\cos^2 x$,$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$,$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Evident că $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ de unde rezultă că $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,de unde avem $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\sin\frac{\beta}{2}>0$, și de aici obținem $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sin\frac{\alpha}{2}$ și $\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|=\sin\frac{\beta}{2}$.

Din $\alpha,\beta,\gamma>0$ și $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ rezultă $0<\alpha+\beta<\pi$,de unde avem $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$, și de aici obținem $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}>0$, de unde rezultă $\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

8. Prof. Gheorghe ROTARIU – Grupul Şcolar „Al. Vlahuţă” Şendriceni, jud. Botoşani



Precizare: Vom considera semicercul $\overset{\frown}{ABCD}$ şi „jumătatea” de hexagon $ABCD$. Pentru demonstrarea cerinţei este suficientă analiza pe figura alăturată. Vom utiliza *teorema lui Pitagora* şi *teorema lui Ptolemeu*. Avem următoarele notaţii:

$AB=a;\ BC=b;\ CD=c;\ AD=2r.$

Unghiurile $\widehat{ABD}$ şi $\widehat{ACD}$ sunt drepte (înscrise în semicerc).

Aplicăm *teorema lui Ptolemeu* pentru patrulaterul inscriptibil $ABCD$:

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD\Leftrightarrow 2br+ac=AC\cdot BD \qquad (1)$$

Aplicăm *teorema lui Pitagora* în triunghiurile dreptunghice ABD şi ACD:

$$BD^2=AD^2-AB^2\Leftrightarrow BD^2=4r^2-a^2 \qquad (2)$$

$$AC^2=AD^2-CD^2\Leftrightarrow AC^2=4r^2-c^2 \qquad (3)$$

Ridicăm la pătrat egalitatea (1):

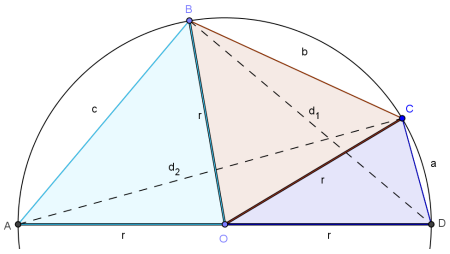
$$2br+ac=AC\cdot BD\Leftrightarrow(2br+ac)^2=AC^2\cdot BD^2\overset{(2)\text{ şi }(3)}{\Leftrightarrow}(2br+ac)^2=$$

$$=\left(4r^2-c^2\right)\left(4r^2-a^2\right)\Leftrightarrow 4b^2r^2+4abcr+a^2c^2=16r^4-4r^2a^2-4r^2c^2+a^2c^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16r^4=4r^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abcr/:4r\Leftrightarrow 4r^3=\left(a^2+b^2+c^2\right)r+abc \qquad \square$$

8. Prof. Biro Istvan, Sannicolau Mare

Observăm că hexagonul este format din 6 triunghiuri isoscele, congruente câte doi iar aceste trunghiuri cu baza a, b respectiv c pot forma un patrulater $ABCD$înscrisîn cercul de rază r cu diametru AD, deoarece suma unghiurilor la vârf este $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.



Aplicând teorema lui Ptolemeu, avem:

$$d_1 \cdot d_2 = 2r \cdot b + a \cdot c, \qquad (1)$$

unde $d_1 = \sqrt{(2r)^2 - c^2}$, $d_2 = \sqrt{(2r)^2 - a^2}$, fiind catete în triunghiurile dreptunghice ABD şi ACD.

Astfel relaţia (1) ridicată la pătrat este echivalentă cu:

$$[(2r)^2 - c^2][(2r)^2 - a^2] = (2rb + ac)^2,$$
$$(2r)^4 - (a^2 + c^2)(2r)^2 + a^2c^2 = b^2(2r)^2 + 4abcr + a^2c^2,$$
$$(2r)^4 = (a^2 + b^2 + c^2)(2r)^2 + 4abcr,$$
$$4r^3 = (a^2 + b^2 + c^2)r + abc. \qquad Q.E.D.$$

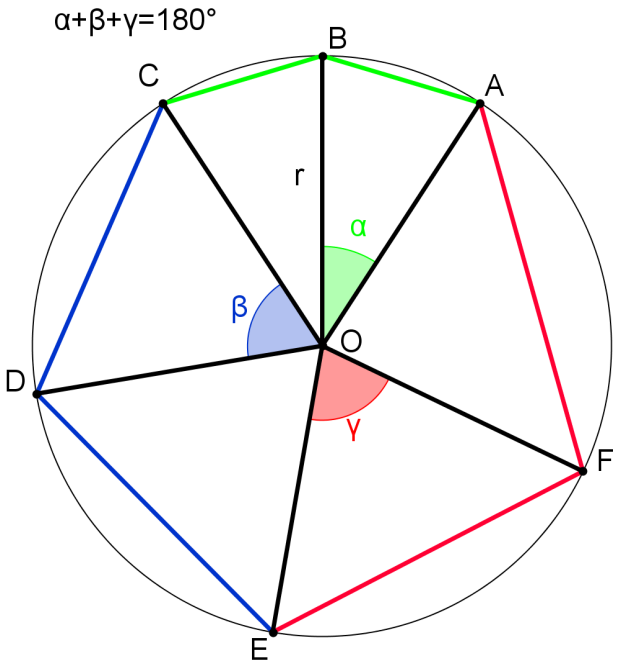
9. Prof. Constantin Telteu, COLEGIUL NAŢIONAL DE ARTE „REGINA MARIA”, Constanţa

Un hexagon înscris într-un cerc de rază r are două laturi de lungime a, două laturi de lungime b şi două laturi de lungime c. Să se demonstreze că

$$4r^3 = (a^2 + b^2 + c^2)r + abc.$$

Prof. Corneliu Manescu Avram

Soluţie:



Din teorema cosinusului avem:

$$\begin{cases} a^2 = 2r^2(1-\cos\alpha) \\ b^2 = 2r^2(1-\cos\beta) \\ c^2 = 2r^2(1-\cos\gamma) \end{cases} \qquad (1)$$

Din teorema sinusurilor avem:

$$\begin{cases} a = 2r\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ b = 2r\sin\dfrac{\beta}{2} \\ c = 2r\sin\dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Înmulţim fiecare din relaţiile (1)

cu r şi apoi le adunăm. Obţinem:

$$r\left(a^2+b^2+c^2\right)=4r^3-2r^3\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\right) \qquad (3)$$

Înmulţind relaţiile (2) obţinem: $abc=8r^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. (4)

Adunând relaţiile (3) cu (4), obţinem:

$$r\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc=4r^3+2r^3\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma+1\right)=4r^3, \text{ Q.E.D.}$$

Observaţii:
1. Nu are importanţă succesiunea laturilor hexagonului(nu s-a folosit în demonstraţie).
2. Ultima paranteză este nulă (identitate cunoscută). Demonstraţie:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}+1=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1. \text{ Am folosit şi } \alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

10. Prof. Virginia Ilina

