Revista Electronică MateInfo.ro

AUGUST 2012

ISSN 2065 – 6432

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

1. SOLUȚII PENTRU PATRU PROBLEME DIN LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, VOL. 14, NR. 3/2011 ALTELE DECÂT CELE DIN LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, VOL. 15, NR. 3 / 2012 PAG. 2
2. OTHER SOLUTIONS FOR THREE PROBLEMS OF MATHEMATICAL REFLECTIONS, ISSUE 3, 2012 PAG. 7
3. PRODUSUL REAL PAG. 10
4. INEGALITATEA GERRETSEN (II) PAG. 17
5. CONDIȚIA CA PATRU PUNCTE SĂ FIE CONCICLICE (metoda analitică) PAG. 24
6. APLICAȚII ALE TRANSFORMĂRILOR EXPRIMATE PRIN NUMERE COMPLEXE ÎN GEOMETRIE. PAG. 27
7. DESPRE FOLOSIREA NOȚIUNII DE MODUL PAG. 30
8. PROBLEMA LUNII IULIE 2012

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

1. SOLUŢII PENTRU PATRU PROBLEME DIN LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, VOL. 14, NR. 3/2011 ALTELE DECÂT CELE DIN LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, VOL. 15, NR. 3 / 2012

TITU ZVONARU, Comăneşti şi NECULAI STANCIU, Buzău

La Gaceta de la RSME, Vol. 14 (2011), Núm. 3

Págs. 511

Problema 181. *Propuesto por Nicuşor Minculete, Universitatea Crestina Dimitrie Cantemir, Brasov, Rumanía.*

Sea A' un punto del lado BC de un triángulo ABC, en el que las longitudes de sus lados BC, CA y AB son, respectivamente, a, b y c. La recta AA' se denomina ceviana de orden k desde el punto A si $\frac{BA'}{A'C} = \left(\frac{c}{b}\right)^k$, para algún entero k.

Para un triángulo ABC denotamos por K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de las cevianas de orden k desde los puntos A, B y C con sus lados opuestos. Sea P un punto del triángulo KLM, y X, Y y Z, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC, CA y AB. Si denotamos por x, y y z, respectivamente, las longitudes de los segmentos PX, PY y PZ, probar que

a) si $P \in LM$, entonces $\frac{x}{a^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}} + \frac{z}{c^{k-1}}$;

b) si $P \in MK$, entonces $\frac{y}{b^{k-1}} = \frac{z}{c^{k-1}} + \frac{x}{a^{k-1}}$; y

c) si $P \in KL$, entonces $\frac{z}{c^{k-1}} = \frac{x}{a^{k-1}} + \frac{y}{b^{k-1}}$.

Soluţie. Avem:

$$ah_a = ax + by + cz,$$

care se deduce uşor pe bază de arii.

De asemenea avem:

$$\frac{PM}{PL}=\frac{Aria(AMP)}{Aria(APL)}=\frac{AL\cdot y}{AM\cdot z},$$

şi cum BL, CM sunt ceviene de ordin k, obţinem:

$$AM=\frac{cb^k}{a^k+b^k},\ AL=\frac{bc^k}{a^k+c^k}.$$

Notăm $S=AP\cap BC$,

şi aplicăm relaţia (R_1) din *Recreaţii Matematice nr. 1/2005, pag. 15:*

$$\frac{AM}{AB}\cdot\frac{SB}{SC}\cdot\frac{AC}{AL}\cdot\frac{PL}{PM}=1\Leftrightarrow\frac{AM}{c}\cdot\frac{SB}{SC}\cdot\frac{b}{AL}\cdot\frac{AL\cdot y}{AM\cdot z}=1\Leftrightarrow\frac{SB}{SC}=\frac{cz}{by},$$

rezultă uşor că:

$$SB=\frac{acz}{by+cz};\ SC=\frac{aby}{by+cz}.$$

Aplicăm acum relaţia (R_2) *Recreaţii Matematice nr. 1/2005, pag. 15:*

$$\frac{AP}{PS}=\frac{a\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{AL}{LC}}{BS\cdot\frac{AM}{MB}+SC\cdot\frac{AL}{LC}}\Leftrightarrow\frac{AP}{PS}=\frac{a\cdot\frac{b^k}{a^k}\cdot\frac{c^k}{a^k}}{\frac{acz}{by+cz}\cdot\frac{b^k}{a^k}+\frac{aby}{by+cz}\cdot\frac{c^k}{a^k}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AP}{PS}=\frac{b^{k-1}c^{k-1}(by+cz)}{a^k(b^{k-1}z+c^{k-1}y)}\qquad(1)$$

Pe de altă parte din asemănare deducem că:

$$\frac{AS}{PS}=\frac{h_a}{x}\Leftrightarrow\frac{AS}{PS}=\frac{ax+by+cz}{ax}\Leftrightarrow\frac{AP}{PS}=\frac{by+cz}{ax}\qquad(2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$\frac{ax}{by+cz}=\frac{a^k(b^{k-1}z+c^{k-1}y)}{b^{k-1}c^{k-1}(by+cz)}\Leftrightarrow\frac{x}{a^{k-1}}=\frac{b^{k-1}z+c^{k-1}y}{b^{k-1}c^{k-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}} + \frac{z}{c^{k-1}}.$$

La Gaceta de la RSME, Vol. 14 (2011), Núm. 3

Págs. 512

Problema 184. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Las longitudes de los lados de un hexágono $ABCDEF$ satisfacen $AB = BC$, $CD = DE$ y $EF = FA$. Probar que

$$\frac{ED}{AD}\cdot\frac{CB}{EB} + \frac{CB}{EB}\cdot\frac{AF}{CF} + \frac{AF}{CF}\cdot\frac{ED}{AD} \geq \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Considerăm pentru început patrulaterul $ACDE$ şi M mijlocul lui CE.

Deoarece $CD = DE$, avem $DM \perp CE$.

Cu inegalitatea triunghiului în ΔADM deducem că $AD \leq AM + MD$, deci AD îşi atinge maximul atunci când punctele A, M, D sunt coliniare, adică dacă ΔACE este isoscel $(AC = AE)$.

Asta înseamnă că fracţia $\frac{ED}{AD}$ este minimă atunci când $AC = CE$. Raţionând analog pentru celelalte două fracţii, rezultă că este suficient să demonstrăm inegalitatea din enunţ în cazul în care ΔACE este echilateral.

În acest caz avem, prin intermediul teoremei sinusurilor:

$$\frac{ED}{AD} = \frac{\sin\angle DAE}{\sin\angle AED} = \frac{\sin 30^0}{\sin\angle AED} \geq \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

(am folosit faptul că $\angle AED < 180^0$ pentru a fi siguri că $\sin\angle AED > 0$ - deci hexagonul trebuie să fie convex).

Acum inegalitatea din enunţ rezultă imediat. Avem egalitate dacă ΔACE este echilateral şi $\sin\angle AED = 1$, adică dacă hexagonul este regulat.

La Gaceta de la RSME, Vol. 14 (2011), Núm. 3

Págs. 512

Problema 185. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{2a^2}{b+c} + \frac{a^3}{b^2+c^2} \right) \geq \frac{9}{2} \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Soluţie. Se folosesc următoarele două inegalităţi *(Exerciţiu!):*

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2}{b+c} \geq 3 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \tag{1}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b^2+c^2} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \tag{2}$$

care prin adunare dau exact inegalitatea de demonstrat.

Comentariu. Deoarece $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, inegalitatea (1) este o întărire a inegalităţii cunoscute:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2},$$

(care se obţine uşor cu inegalitatea lui *Bergström*).

La Gaceta de la RSME, Vol. 14 (2011), Núm. 3

Págs. 512

PROBLEMA 186. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sea ABC un triángulo con $A \geq \frac{\pi}{2}$ y $b \geq c$. Sean m y n, respectivamente, las longitudes de las proyecciones de los lados AC y AB sobre el lado BC.

a) Probar que $b-c \leq m-n \leq \sqrt{2}(b-c)$.

b) Evaluar $\lim_{b\to c} \frac{m-n}{b-c}$.

Soluţie. Deoarece $b \geq c$, atunci $n \geq m$. Cum $A \geq \frac{\pi}{2}$, unghiurile B şi C sunt ascuţite, aşa că punctul D, proiecţia lui A pe BC, aparţine segmentului BC.

Folosind teorema cosinusului avem:

$$m = c\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}, n = b\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}, \text{ deci } n-m = \frac{b^2-c^2}{a}.$$

a) Avem:

(i) $b-c \leq n-m \Leftrightarrow a(b-c) \leq b^2-c^2 \Leftrightarrow (b-c)(b+c-a) \geq 0$,

adevărată în ipoteza $b \geq c$ (deoarece $b+c > a$).

(ii) Deoarece $A \geq \frac{\pi}{2}$, avem $b^2+c^2 \leq a^2$ şi cum $2bc \leq b^2+c^2 \leq a^2$,

prin adunare obţinem:

$$b^2+c^2+2bc \leq 2a^2 \Leftrightarrow b+c \leq a\sqrt{2} \qquad (1)$$

Rezultă că:

$$n-m \leq \sqrt{2}(b-c) \Leftrightarrow \frac{b^2-c^2}{a} \leq \sqrt{2}(b-c) \Leftrightarrow (b-c)[a\sqrt{2}-(b+c)] \geq 0,$$

adevărată conform (1) şi ipoteza $b \geq c$.

În ambele inegalităţi avem egalitatea dacă şi numai dacă $b = c$, adică triunghiul ABC este isoscel.

b) $$\lim_{b\to c} \frac{n-m}{b-c} = \lim_{b\to c} \frac{b^2-c^2}{a(b-c)} = \lim_{b\to c} \frac{b+c}{a} = \frac{2c}{a} = \frac{1}{\cos B},$$

(deoarece când $b = c$ triunghiul devine isoscel).

2. OTHER SOLUTIONS FOR THREE PROBLEMS OF MATHEMATICAL REFLECTIONS, ISSUE 3, 2012

By Titu ZVONARU, Comăneşti and Neculai STANCIU, Buzău

J230. Let ABC be a triangle and let M be the midpoint of the side BC. Suppose that there is some $0° < x \leq 30°$ so that the measure of $\angle ACB, \angle ABC, \angle MAC$ are $x, 60° - x, 2x$, respectively. Determine x.

Proposed by Marius Stanean and Mircea Lascu, Zalau, Romania

Solution:

We have: $\angle MAB = 120^0 - 2x$.

By $Area(ABM) = Area(ACM)$ we obtain successively that:

$$AB \cdot AM \cdot \sin \angle MAB = AC \cdot AM \cdot \sin \angle MAC \Leftrightarrow c \sin(120^0 - 2x) = b \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin C \sin(60^0 + 2x) = \sin B \sin 2x \Leftrightarrow \sin x \sin(60^0 + 2x) = \sin 2x \sin(60^0 - x)$$

$$\Leftrightarrow (*) \sin x \sin(60^0 + 2x) = 2 \sin x \cos x \sin(60^0 - x).$$

Because $\sin x \neq 0$, by (*) we have that:

$$\sin(60^0 + 2x) = \sin(60^0 - x + x) + \sin(60^0 - x - x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(60^0 + 2x) - \sin(60^0 - 2x) = \sin 60^0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{60^0 + 2x - 60^0 + 2x}{2} \cos \frac{60^0 + 2x + 60^0 - 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so we obtain that $2x = 60^0 \Rightarrow x = 30^0$.

S230. Let x, y, z be positive real numbers such that

$$xy + yz + zx \geq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Prove that $x + y + z \geq \sqrt{3}$.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution:

We denote by $t = xy + yz + zx > 0$ and we have:

$$xy + yz + zx \geq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow t^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 2t \geq \frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq \frac{1}{t^2} + 2t \qquad (*)$$

By AM-GM inequality we obtain that:

$$\frac{1}{t^2} + 2t = \frac{1}{t^2} + t + t \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{t^2} \cdot t \cdot t} = 3 \qquad (**)$$

By (*) and (**) we deduce that:

$(x + y + z)^3 \geq 3 \Leftrightarrow x + y + z \geq \sqrt{3}$, and we are done.

S233. In triangle ABC with $\angle C = 60°$, let AA' and BB' be the angle bisectors of $\angle A$ and $\angle B$. Prove that

$$\frac{a+b}{A'B'} \leq \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right).$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Solution :

Because $\angle C = 60^0$ by law of cosines we have $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

By the theorem of bisector we deduce that

$$A'C = \frac{ab}{b+c}, B'C = \frac{ab}{a+c},$$

and applying the law of cosines in $\Delta A'B'C$ we obtain that:

$$A'B'^2 = \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2} - 2\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ab}{a+c}\cdot\cos 60^0 =$$

$$= \frac{a^2b^2\left[(a+c)^2 + (b+c)^2 - (a+c)(b+c)\right]}{(a+c)^2(b+c)^2} = \frac{a^2b^2c(a+b+2c)}{(a+c)^2(b+c)^2}.$$

The given inequality becomes successively:

$$\frac{a+b}{A'B'} \leq \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2c} \leq \frac{(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq c(a+b+2c) \Leftrightarrow (a+b)^2 - c(a+b) - 2c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-2c) \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 2c \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \leq 4c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \leq 4(a^2+b^2-ab) \Leftrightarrow 3(a-b)^2 \geq 0,$$ true, and we are done.

We have equality if and only if $a = b = c$.

3. PRODUSUL REAL

Profesor Codreanu Ioan Viorel

Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Se numește ***produs real*** al numerelor complexe a,b numărul $a\cdot b=\frac{1}{2}\left(\bar{a}b+a\bar{b}\right)$. Observăm că $\overline{a\cdot b}=\frac{1}{2}\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right)=a\cdot b$, deci $\text{Im}\left(a\cdot b\right)=0$ și prin urmare $a\cdot b\in R$, fapt ce motivează denumirea acestui produs.

Propoziția 1. Au loc următoarele proprietăți:

1) $a\cdot a=\left|a\right|^2,\forall a\in C$;

2) $a\cdot b=b\cdot a,\forall a,b\in C$ **(comutativitate)**;

3) $a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c,\forall a,b,c\in C$ **(distributivitate față de adunare)**;

4) $\left(\alpha a\right)\cdot b=\alpha\left(a\cdot b\right)=a\cdot\left(\alpha b\right),\forall a,b\in C,\forall\alpha\in R.$

5) **Dacă** $A\left(a\right),B\left(b\right)$ **sunt puncte distincte și diferite de** $O\left(0\right)$**, atunci** $a\cdot b=0\Leftrightarrow OA\perp OB.$

Demonstrație**:** Primele patru proprietăți se demonstrează ușor folosind definiția produsului real și proprietățile conjugatului unui număr complex. Avem

1) $a\cdot a=\frac{1}{2}\left(\bar{a}a+a\bar{a}\right)=a\bar{a}=\left|a\right|^2.$

2) $a\cdot b=\frac{1}{2}\left(\overline{a}b+a\overline{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{b}a+b\overline{a}\right)=b\cdot a$.

3) $a\cdot(b+c)=\frac{1}{2}\left(\overline{a}(b+c)+a\overline{b+c}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{a}b+a\overline{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{a}c+a\overline{c}\right)=a\cdot b+a\cdot c$.

4) $(\alpha a)\cdot b=\frac{1}{2}\left(\overline{\alpha a}b+\alpha a\overline{b}\right)=\frac{1}{2}\alpha\left(\overline{a}b+a\overline{b}\right)=\alpha(a\cdot b)$ și

$$a\cdot(\alpha b)=\frac{1}{2}\left(\overline{a}\alpha b+a\overline{\alpha b}\right)=\frac{1}{2}\alpha\left(\overline{a}b+a\overline{b}\right)=\alpha(a\cdot b)$$

5) Vom folosi următorul rezultat:

„ Fie punctele $M_1(z_1),M_2(z_2),M_3(z_3),M_4(z_4)$ *două câte două distincte. Are loc echivalența*: $M_1M_2\perp M_3M_4\Leftrightarrow\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\in C\setminus R$”

Atunci $OA\perp OB\Leftrightarrow\frac{a}{b}\in C\setminus R\Leftrightarrow\frac{a}{b}=-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\Leftrightarrow\overline{a}b+a\overline{b}=0\Leftrightarrow a\cdot b=0$.

Observație. Numărul $a\cdot b$ este egal cu valoarea absolută a puterii originii $O(0)$ față de cercul de diametru AB ([1], *p.*112 – 113).

Teorema 2. Dacă $A(a),B(b),C(c),D(d)$ **sunt patru puncte distincte, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:**

1) $AB\perp CD$**;**

2) $(b-a)\cdot(d-c)=0$**;**

3) $\frac{b-a}{d-c}\in C\setminus R$

4) $\mathrm{Re}\left(\frac{b-a}{d-c}\right)=0$**.**

Demonstrație. Construim punctele M și N astfel ca patrulaterele $OABM$ și $OCDN$ să fie paralelograme (eventual degenerate). Punctele M și N au afixele $b-a$ respectiv $d-c$.

Perpendicularitatea dreptelor AB și CD este echivalenă cu $OM \perp ON$ ceea ce conform ***Propoziției 1*** revine la $(b-a)\cdot(d-c)=0.$ Folosind definiția produsului real al numerelor complexe $b-a$ și $d-c$, avem

$$(b-a)\cdot(d-c)=0 \Leftrightarrow \overline{b-a}(d-c)+(b-a)\overline{d-c}=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{b-a}{d-c}=-\overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c}\in C-R \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{b-a}{d-c}\right)=0.$$

Aplicații

1. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon cu centrul de greutate G și A_{ij} mijlocul segmentului $\left[A_iA_j\right], i<j, i, j=\overline{1,n}.$ Dacă M este un punct arbitrar în planul poligonului, atunci:

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}MA_k^{\,2}+n^2MG^2=4\sum_{i<j}MA_{ij}^{\,2}$$

***Soluție*:** Dacă $A_1(a_1), A_2(a_2),..., A_n(a_n)$, atunci $G\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)$ și $A_{ij}\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)$, $i<j, i, j=\overline{1,n}.$ Presupunând că $M(m)$, obținem:

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n} MA_k^{\,2} + n^2 MG^2 = (n-2)\sum_{k=1}^{n} |m-a_k|^2 + n^2 |m-g|^2 =$$

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n} (m-a_k)\cdot(m-a_k) + n^2 \left(m - \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)\cdot\left(m - \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right) =$$

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n} \left(|m|^2 - 2m\cdot a_k + |a_k|^2\right) + n^2 \left(|m|^2 - 2m\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} + \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right|^2\right) =$$

$$(n-2)n|m|^2 - 2(n-2)\sum_{k=1}^{n} m\cdot a_k + (n-2)\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + n^2|m|^2 - 2n\sum_{k=1}^{n} m\cdot a_k + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 =$$

$$2n(n-1)|m|^2 - 4(n-1)\sum_{k=1}^{n} m\cdot a_k + (n-2)\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 =$$

$$2n(n-1)|m|^2 - 4(n-1)\sum_{k=1}^{n} m\cdot a_k + (n-1)\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + 2\sum_{i<j} a_i\cdot a_j$$

unde am utilizat proprietățile produsului real.

Analog avem

$$4\sum_{i<j} MA_{ij}^{\,2} = 4\sum_{i<j}\left(m - \frac{a_i + a_j}{2}\right)\cdot\left(m - \frac{a_i + a_j}{2}\right) =$$

$$4\sum_{i<j}\left(|m|^2 - m\cdot(a_i + a_j) + \frac{1}{4}(a_i + a_j)\cdot(a_i + a_j)\right) =$$

$$4\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot|m|^2 - 4\sum_{i<j} m\cdot(a_i + a_j) + \sum_{i<j}\left(|a_i|^2 + 2a_i\cdot a_j + |a_j|^2\right) =$$

$$2n(n-1)|m|^2 - 4(n-1)\sum_{k=1}^{n} m\cdot a_k + (n-1)\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + 2\sum_{i<j} a_i\cdot a_j.$$

Comparând cele două rezultate de mai sus rezultă egalitatea dorită.

2. Fie ABC **un triunghi oarecare,** G **centrul său de greutate,** A_1, B_1, C_1 **mijloacele laturilor** $(BC), (CA), (AB)$**, iar** M **un punct oarecare în planul triunghiului** ABC**. Atunci:**

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4\left(MA_1^{\ 2} + MB_1^{\ 2} + MC_1^{\ 2}\right)$$

Dumitru Acu, Gazeta Matematică nr. 5, 1987

Soluție. Folosim rezultatul problemei anterioare pentru $n = 3$.

3. În triunghiul ABC, punctele H, G, O, I sunt ortocentrul, centrul de greutate, centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să se arate că are loc egalitatea

$$HI^2 + 2OI^2 = 3\left(IG^2 + 2GO^2\right)$$

Numerus, vol. 7, 1941

Soluție. Alegem originea axelor în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

Notăm afixele punctelor H, I, G cu h, i, g. Avem $h = a + b + c$ și $g = \dfrac{a+b+c}{3}$, deci $h = 3g$.

Au loc echivalențele

$$\begin{aligned}
&HI^2 + 2OI^2 = 3\left(IG^2 + 2GO^2\right) \Leftrightarrow |i-h|^2 + 2|i|^2 = 3\left(|g-i|^2 + 2|g|^2\right) \Leftrightarrow \\
&(i-h)\cdot(i-h) + 2|i|^2 = 3\left((g-i)\cdot(g-i) + 2|g|^2\right) \Leftrightarrow \\
&|i|^2 - 2i\cdot h + |h|^2 + 2|i|^2 = 3\left(|g|^2 - 2g\cdot i + |i|^2 + 2|g|^2\right) \Leftrightarrow \\
&|h|^2 - 2i\cdot h = 9|g|^2 - 6g\cdot i.
\end{aligned}$$

ultima egalitate fiind adevărată dacă ținem seama de egalitatea $h = 3g$.

4. Fie M și N mijloacele laturilor AB și CD ale patrulaterului $ABCD$. Demonstrați că

$$AN^2 + DM^2 + BC^2 = BN^2 + CM^2 + AD^2$$

Toshio Seimiga, Kawasaki, Japonia-Crux Mathematicorum

Soluție. Notăm afixele punctelor A,B,C,D,M,N cu a,b,c,d,m,n. Folosind proprietățile produsului real obținem

$$AN^2+DM^2+BC^2=|n-a|^2+|m-d|^2+|c-b|^2=$$
$$(n-a)\cdot(n-a)+(m-d)\cdot(m-d)+(c-b)\cdot(c-b)=$$
$$|n|^2-2n\cdot a+|a|^2+|m|^2-2m\cdot d+|d|^2+|c|^2-2c\cdot b+|b|^2.$$

Analog

$$BN^2+CM^2+AD^2=|n-b|^2+|m-c|^2+|d-a|^2=$$
$$(n-b)\cdot(n-b)+(m-c)\cdot(m-c)+(d-a)\cdot(d-a)=$$
$$|n|^2-2n\cdot b+|b|^2+|m|^2-2m\cdot c+|c|^2+|d|^2-2d\cdot a+|a|^2.$$

Este suficient să arătăm că $n\cdot a+m\cdot d+c\cdot b=n\cdot b+m\cdot c+d\cdot a.$ Deoarece M,N sunt mijloacele segmentelor AB,CD, avem $m=\frac{a+b}{2},n=\frac{c+d}{2}.$ După înlocuiri egalitatea ce trebuie dovedită este

$$\frac{d+c}{2}\cdot a+\frac{a+b}{2}\cdot d+b\cdot c=\frac{d+c}{2}\cdot b+\frac{a+b}{2}\cdot c+d\cdot a$$

care după efectuarea calculelor devine

$$2a\cdot d+c\cdot a+b\cdot d+2b\cdot c=2a\cdot d+c\cdot a+b\cdot d+2b\cdot c$$

evident adevărată.

5. Fie A,B,C,D și E cinci puncte în plan și M,N,P,Q și R mijloacele segmentelor $(AB),(BC),(CD),(DE)$ și respectiv (EA). Să se demonstreze că $MQ\perp PR$ dacă și numai dacă $EN^2=MQ^2+PR^2$.

Marcel Chiriță

Soluție. Fie originea în punctul E și notăm cu litere mici afixele celorlalte puncte. Mijloacele segmentelor date vor fi

$$m=\frac{a+b}{2}, n=\frac{b+c}{2}, p=\frac{c+d}{2}, q=\frac{d}{2}, r=\frac{a}{2}.$$

Folosind ***Propoziția 1*** avem

$$EN^2=MQ^2+PR^2 \Leftrightarrow |n|^2=|q-m|^2+|r-p|^2 \Leftrightarrow$$
$$n\cdot n=(q-m)\cdot(q-m)+(r-p)\cdot(r-p)\Leftrightarrow$$
$$n\cdot n=q\cdot q-2q\cdot m+m\cdot m+r\cdot r-2r\cdot p+p\cdot p \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}(b+c)\cdot(b+c)=\frac{1}{4}d\cdot d-\frac{1}{2}d\cdot(a+b)+\frac{1}{4}(a+b)\cdot(a+b)+$$
$$\frac{1}{4}a\cdot a-\frac{1}{2}a\cdot(c+d)+\frac{1}{4}(c+d)\cdot(c+d)\Leftrightarrow$$
$$b\cdot b+2b\cdot c+c\cdot c=d\cdot d-2d\cdot a-2d\cdot b+a\cdot a+2a\cdot b+b\cdot b+$$
$$a\cdot a-2a\cdot c-2a\cdot d+c\cdot c+2c\cdot d+d\cdot d \Leftrightarrow$$
$$|a|^2+|d|^2+a\cdot b+c\cdot d-a\cdot c-2a\cdot d-b\cdot c-b\cdot d=0.$$

Folosind ***Teorema 2*** avem

$$MQ\perp PR\Leftrightarrow(q-m)\cdot(r-p)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}(d-a-b)\cdot(a-c-d)=0\Leftrightarrow$$
$$d\cdot a-d\cdot c-d\cdot d-a\cdot a+a\cdot c+a\cdot d-b\cdot a+b\cdot c+b\cdot d=0\Leftrightarrow$$
$$|a|^2+|d|^2+a\cdot b+c\cdot d-a\cdot c-2a\cdot d-b\cdot c-b\cdot d=0.$$

Comparând cele două rezultate de mai sus rezultă concluzia dorită.

Bibliografie:

[1] **Dorin Andrica, Csaba Varga, Daniel Văcărețu, *Teme de geometrie*, Editura Promedia**

Plus, Cluj-Napoca, 1997.

[2] **Marian Dincă, Marcel Chiriță, *Numere complexe în matematica de liceu,* Editura All,**

1996.

4. INEGALITATEA GERRETSEN (II)

Profesor Codreanu Ioan Viorel

Școala Gimnazială Satulung, Maramureș

Acest articol este continuarea celui publicat în **Revista Mateinfo.ro, Iunie-2012**. Noutatea o prezintă partea stângă a inegalității **Gerretsen,** pe care o vom demonstra folosind substituțiile **Ravi**.

Teoremă (Inegalitatea Gerretsen). Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi oarecare ABC, iar r,R sunt razele cercului înscris respectiv circumscris al triunghiului, atunci

$$16Rr-5r^2 \le p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$$

***Demonstrație*:** Inegalitatea din dreapta a fost demonstrată în $[1]$. Partea stângă a inegalității **Gerretsen** o vom demonstra folosind substituțiile **Ravi**, dacă a,b,c sunt laturile triunghiului ABC atunci există $x,y,z>0$ astfel încât $a=y+z, b=z+x, c=x+y$, mai exact luăm $x=p-a, y=p-b, z=p-c$. Atunci $p=\sum x, R=\dfrac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}$ și $r=\sqrt{\dfrac{\prod x}{\sum x}}$. În continuare după înlocuiri avem de demonstrat

$$16\cdot\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{(\sum x)(\prod x)}}\cdot\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}-5\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^2 \le \left(\sum x\right)^2$$

care după efectuarea calculelor devine

$$\left(\sum x\right)^3 \ge 4\prod(x+y)-5\prod x$$

și folosind identitatea $\left(\sum x\right)^3 = \sum x^3 + 3\prod(x+y)$ o scriem

$$\sum x^3 \geq \prod(x+y) - 5\prod x$$

care după folosirea identității $\prod(x+y) = \sum xy(x+y) + 2\prod x$ devine

$$\sum x^3 + 3\prod x \geq \sum xy(x+y)$$

aceasta fiind cunoscuta inegalitate **Schur**.

Aplicații:1. Să se arate că în orice triunghi avem: $\sum \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{4(2R-r)}{r} \geq 12$.

Ovidiu Pop, Petre Braica, Gazeta Matematică nr. 6, 2010

Soluție. Folosind identitatea $\sum \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}$ avem:

$$\frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2} \geq \frac{4(2R-r)}{r} \Leftrightarrow p^2 + r^2 - 8Rr \geq 8Rr - 4r^2 \Leftrightarrow p^2 \geq 16Rr - 5r^2$$

tocmai **Inegalitatea Gerretsen**.

Inegalitatea $\frac{4(2R-r)}{r} \geq 12$ este echivalentă cu **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

2. Fie a,b,c **lungimile laturilor unui triunghi. Demonstrați că:**

$$\prod(a+b) + \prod(-a+b+c) \geq 9\prod a$$

Mathematical Reflections

Soluție. Folosind identitățile: $\prod(a+b) = 2p\left(p^2 + r^2 + 2Rr\right), \prod a = 4pRr$ și $\prod(-a+b+c) = 8pr^2$ avem:

$\prod(a+b)+\prod(-a+b+c)\geq 9\prod a \Leftrightarrow 2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)+8pr^2\geq 36pRr \Leftrightarrow p^2\geq 16Rr-5r^2$
adică **Inegalitatea Gerretsen**.

3. Arătați că în orice triunghi ABC **are loc inegalitatea:**

$$\sum\frac{m_a}{s_a}\leq\frac{\sum a^3}{\prod a}$$

unde s_a, s_b, s_c **sunt lungimile simedianelor triunghiului** ABC.

Mircea Lascu, Gazeta Matematică nr. 12, 1994

Soluție. Este cunoscută egalitatea $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot m_a$ și analoagele. Atunci

$\sum\frac{m_a}{s_a}=\frac{1}{2}\cdot\sum\frac{b^2+c^2}{bc}$ și folosind identitățile

$$\sum\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr},\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right),\prod a=4pRr$$

avem

$$\sum\frac{m_a}{s_a}\leq\frac{\sum a^3}{\prod a}\Leftrightarrow\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\leq\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4pRr}\Leftrightarrow$$
$$p^2+2r^2-2Rr\leq 2p^2-6r^2-12Rr\Leftrightarrow p^2\geq 10Rr+7r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2\geq 16Rr-5r^2\Rightarrow p^2\geq 10Rr+6Rr-5r^2\geq 10Rr+7r^2$

unde am folosit **Inegalitatea Euler** $R\geq 2r$.

4. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{\sum a^3}{\prod a}\geq 4-\frac{2r}{R}$$

Ho Quang Vinh, The Mathscope-jurnal vietnamez de matematică

Soluție. Utilizând egalitățile $\sum a^3 = 2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right), \prod a = 4pRr$ inegalitatea din enunț se scrie echivalent

$$\frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \geq 4 - \frac{2r}{R} \Leftrightarrow p^2 \geq 14Rr - r^2.$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \Rightarrow p^2 \geq 14Rr + 2Rr - 5r^2 \geq 14Rr - r^2$

unde am folosit **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

5. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\sum \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq 24 \prod \sin \frac{A}{2}$$

Crux Mathematicorum

Soluție. Vom folosi identitățile

$$\sum \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2}, \sum \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2},$$
$$\sum \sin B \cdot \sin C = \frac{p^2 + r^2 + 4R}{4R^2}, \prod \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{4R}.$$

Inegalitatea din enunț se scrie echivalent

$$\sum \left(\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right)^2 \geq 24 \cdot \frac{r}{4R}$$

și

$$\sum \left(\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right)^2 + \sum 2 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sum \left(\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right)^2 \geq 6 \cdot \frac{r}{R}$$

care după înlocuiri devine

$$\frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2} + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{8R^2} + \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2} \geq 6 \cdot \frac{r}{R}$$

și după efectuarea calculelor o scriem

$$4p^2+16R^2+8Rr+4r^2\geq 96Rr$$

echivalentă cu

$$p^2\geq 22Rr-4R^2-r^2$$

Ținând seama de **Inegalitatea Gerretsen** $p^2\geq 16Rr-5r^2$ este suficient să demonstrăm inegalitatea

$$16Rr-5r^2\geq 22Rr-4R^2-r^2$$

echivalentă cu

$$2R^2-3Rr-2r^2\geq 0.$$

Folosind **Inegalitatea Euler** $R\geq 2r$ avem $2R^2\geq 4Rr=3Rr+Rr\geq 3Rr+2r^2$ ce încheie soluția.

6. În orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}\sum\frac{a^2}{bc}\geq 2-\frac{r}{R}$$

La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola

Soluție. Folosind identitatea $\sum\frac{a^2}{bc}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$ inegalitatea din enunț se scrie echivalent

$$\frac{p^2-3r^2-6Rr}{4Rr}\geq\frac{2R-r}{R}\Leftrightarrow p^2-3r^2-6Rr\geq 8Rr-4r^2\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2\geq 16Rr-5r^2$ obținem, ținând seama de **Inegalitatea Euler** $R\geq 2r$, $p^2\geq 14Rr-r^2+2r(R-2r)\geq 14Rr-r^2$.

7. Fie A,B **și** C **unghiurile unui triunghi. Demonstrați că**

$$\left(\sum\sin A\right)^2\leq 6\left(1+\prod\cos A\right)$$

Vedula N. Murty, Crux Mathematicorum

Soluție. Folosim identitățile $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ și $\prod \cos A = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$. Avem

$$\left(\sum \sin A\right)^2 \le 6\left(1 + \prod \cos A\right) \Leftrightarrow \frac{p^2}{R^2} \le 6\left(1 + \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}\right) \Leftrightarrow$$
$$2p^2 \le 3\left(p^2 - (2R+r)^2 + 4R^2\right) \Leftrightarrow p^2 \ge 12Rr + 3r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și **Inegalitatea Euler** $R \ge 2r$ avem

$$p^2 \ge 12Rr + 3r^2 + 4r(R-2r) \ge 12Rr + 3r^2.$$

8. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{36\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right)}{35}$$

J. F. Darling, The American Mathematical Monthly, 1961

Soluție. Folosind identitățile $\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$ și $\prod a = 4pRr$ inegalitatea din enunț se scrie echivalent

$$2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) \ge \frac{36\left(p^2 + 4Rr\right)}{35} \Leftrightarrow 35\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) \ge 18\left(p^2 + 4Rr\right) \Leftrightarrow$$
$$17p^2 \ge 212Rr + 35r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ și **Inegalitatea Euler** $R \ge 2r$ avem

$$17p^2 \ge 17\left(16Rr - 5r^2\right) = 272Rr - 85r^2 = 212Rr + 35r^2 + 60r(R-2r) \ge 212Rr + 35r^2.$$

9. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\max\left\{\frac{a}{bc}, \frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}\right\} \ge \frac{\sum h_a}{\sum a h_a}$$

Traian Tămîian, Revista de Matematică din Timișoara nr.1, 2001

Soluție. Vom folosi identitățile $\sum \frac{a}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pRr}$ și $\sum h_a = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$. Cum

$\max\left\{\frac{a}{bc}, \frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}\right\} \geq \frac{\sum \frac{a}{bc}}{3}$ este suficient să arătăm că $\frac{\sum \frac{a}{bc}}{3} \geq \frac{\sum h_a}{\sum ah_a}$ și dacă ținem seama de relația $ah_a = 2S$ și analoagele, ultima inegalitate se scrie echivalent

$$\sum \frac{a}{bc} \geq \frac{\sum h_a}{2S} \Leftrightarrow \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pRr} \geq \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr} \Leftrightarrow$$
$$2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right) \geq p^2 + r^2 + 4Rr \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$ avem

$$p^2 \geq 12Rr + 3r^2 + 4r\left(R - 2r\right) \geq 12Rr + 3r^2.$$

10. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum \cos^4 \frac{A}{2} \leq \frac{p^3}{2abc}$$

Crux Mathematicorum

Soluție. Folosim identitățile $\sum \cos^4 \frac{A}{2} = \frac{(4R + r)^2 - p^2}{8R^2}$ și $\prod a = 4Rpr$. Au loc echivalențele

$$\sum \cos^4 \frac{A}{2} \leq \frac{p^3}{2abc} \Leftrightarrow \frac{(4R + r)^2 - p^2}{8R^2} \leq \frac{p^3}{8Rpr} \Leftrightarrow$$
$$r\left[(4R + r)^2 - p^2\right] \leq Rp^2 \Leftrightarrow p^2(R + r) \geq r(4R + r)^2$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen** $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ este suficient să demonstrăm că

$$\left(16Rr - 5r^2\right)(R + r) \geq r(4R + r)^2$$

echivalentă cu

$$16R^2r + 11Rr^2 - 5r^3 \geq 16R^2r + 8Rr^2 + r^3$$

și cu $3Rr^2 \geq 6r^2$ ce se reduce la **Inegalitatea Euler** $R \geq 2r$.

Bibliografie:

[1] **Revista Mateinfo.ro,** ***Iunie 2012.***

[2] **Constantin C. Florea, Corina Daniela C. Florea,** ***Abordare globală a geometriei triunghiului cu implicații creative,*** **Editura All, București, 1996.**

5. CONDIȚIA CA PATRU PUNCTE SĂ FIE CONCICLICE

-metoda analitică-

Profesor : ANGELICA UNGUREANU

Școala: GRUPUL ȘCOLAR "ALEXANDRU CEL BUN"-BOTOȘANI

Patru (saumaimulte) puncte se numesc**conciclice**dacă aparțin unui cerc.

În reperul cartezian *xOy* , considerăm punctele $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ astfel încât oricare trei dintre ele să nu fie coliniare.

Vrem să determinăm în ce condiții aceste puncte sunt conciclice, adică în ce condiții există un cerc ce conține cele patru puncte,utilizând metoda analitică.

Ecuația normală a unui cerc este:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Celepatrupunctesuntpeunasemeneacercdacă ecuația cercului este verificată de coordonatele fiecărui punct.

Se obține sistemul (în necunoscutele m , n și p) :

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + mx_2 + ny_2 + p = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + mx_3 + ny_3 + p = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + mx_4 + ny_4 + p = 0 \end{cases}$$

Fie A-matriceacoeficienților lorsistemului: $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}$.

Rangulmatricei A este 3 deoarece toți minorii de ordinul trei conținuți sunt nenuli, oricaretrei din celepatrupunctenefiinndcoliniare . Conform teoremeiluiKronecker-Capelli ,sistemulestecompatibildacă : rangA=rang $\overline{A}$=3

$\Rightarrow det\overline{A}=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & 1 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & 1 & -(x_3^2+y_3^2) \\ x_4 & y_4 & 1 & -(x_4^2+y_4^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$ —condiția de conciclicitate a patrupuncte

Deoarecerangulmatriceisistemuluiesteegal cu numărulnecunoscutelor ,sistemulestecompatibildeterminat. Soluțiaunicăaratăcăcerculceconținecelepatrupuncteeste bine determinat.

ExempluFie punctele A(1,0) , B(-2,1) , C(-1,4) , D(2,1).Să se aratecăcelepatrupunctesuntconciclice.

SoluțieDin condiția de conciclicitate a patrupuncteobținemdeterminantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 17 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overline{\overline{c_1 - c_4}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 16 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overline{\overline{dezvolt\ dupa\ L_1}}$$

$$= (-1)^5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ceeaceînseamnăcăpunctelesuntconciclice.

Pentru a determinaecuația cercului ce trece prin cele patru puncte, din sistemul în necunoscute m , n și p oprim doar trei din cele patru ecuații , de exemplu:

$$\begin{cases} m + p = -1 \\ -2m + n + p = -5 \\ -m + 4n + p = -17 \end{cases}$$

Determinantulmatriceisistemuluieste: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$ sistem Cramer, cu soluția: $\begin{cases} m = 0 \\ n = -4 \\ p = -1 \end{cases}$.

Ecuația cercului ce conține cele patru puncte este :

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$$

Dacă punctul M*(a,b)*estecentrulacestuicerc , coordonatele sale vor fi :

$$a = -\frac{m}{2} = 0; \quad b = -\frac{n}{2} = 2$$

iarrazacercului :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} = \sqrt{5}$$

Bibliografie:

- Gh.D.Simionescu - *"Geometrieanalitică "- Manual pentruanul IIIliceu, secţia reală şi licee de specialitate* ; Editura didactică şi pedagogică-Bucureşti, 1976

6. APLICAŢII ALE TRANSFORMĂRILOR EXPRIMATE PRIN NUMERE COMPLEXE ÎN GEOMETRIE.

Să considerăm un plan Π în care presupunem aleasă o unitate de lungime şi un unghi drept xOy orientat în sens trigonometric. Dacă **C** reprezintă corpul numerelor complexe , atunci este cunoscut faptul că există o bijecţie F: **C**→Π. Dacă A∈Π, vom nota prin $a = F^{-1}(A)$ afixul lui A.

Fiind dat un triunghi ABC, astfel încât centrul cercului circumscris coincide cu O , este cunoscut faptul că (vezi [1]) că afixul ortocentrului H este dat de :

$$h = a + b + c, \qquad (1)$$

afixul centrului de greutate G este dat de: $g = \frac{a+b+c}{3}$, (2)

iar afixul centrului cercului circumscris lui Euler E este dat de: $e = \frac{a+b+c}{2}$ (3)

De asemenea este cunoscut faptul că patru puncte M_1 , M_2 , M_3 , M_4 sunt conciclice sau coliniare dacă :

$$\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} \in R .$$

În cele ce urmează vom considera un patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$ înscris în cercul cu centrul în O şi vom nota cu H_1, H_2, H_3 respectiv H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ respectiv $A_1A_2A_3$. În prima olimpiadă balcanică de matematică ,una din problemele propuse cerea să se arate că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

O soluţie a problemei este următoarea. Notăm cu $k = a_1+a_2+a_3+a_4$, în baza relaţie (1), avem $h_i = k - a_i$, i = 1,2,3,4.

Aplicaţia T: **C** → **C** , T(Z) = k – Z este o izometrie , deoarece

$$|T(Z_1)-T(Z_2)| = |(k-Z_1)-(k-Z_2)| = |Z_1-Z_2|$$

şi cum $h_i = T(a_i)$, i = 1,2,3,4, iar o izometrie păstrează congruenţa figurilor geometrice, rezultă că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

.

Problema 149 din [2] ne cere să arătăm că centrele de greutate G_1,G_2,G_3, respectiv G_4 ale triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ respectiv A1A2A3 sunt conciclice.

În adevăr, conform relaţiei (2) avem $g_i = \frac{k-a_i}{3}$, i = 1,2,3,4 , de unde

$$\frac{g_3-g_1}{g_3-g_2}:\frac{g_4-g_1}{g_4-g_2} = \frac{\frac{k-a_3}{3}-\frac{k-a_1}{3}}{\frac{k-a_3}{3}-\frac{k-a_2}{3}}:\frac{\frac{k-a_4}{3}-\frac{k-a_1}{3}}{\frac{k-a_4}{3}-\frac{k-a_2}{3}} = \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}$$ şi cum

patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este inscriptibil , adică $\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}\in\mathbf{R}$, rezult

$\frac{g_3-g_1}{g_3-g_2}:\frac{g_4-g_1}{g_4-g_2}\in\mathbf{R}$, adică $G_1G_2G_3G_4$, sunt conciclice.

Mai mult, putem arăta că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi $A_1A_2A_3A_4$ sunt asemenea.

În adevăr , aplicaţia U: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $U(Z)=\frac{1}{3}(k - Z)$ este o asemănare. Cum $(a_i)=g_i$,

rezultă că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi $A_1A_2A_3A_4$ sunt asemenea , raportul de asemănare fiind $\frac{1}{3}$.

Dacă notăm cu E_1,E_2,E_3 respectiv E_4 centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ respectiv $A_1A_2A_3$, atunci urmând un raţionament ca mai sus rezultă că punctele E_1,E_2,E_3 respectiv E_4 sunt conciclice , patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $E_1E_2E_3E_4$ sunt asemenea , raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.

Este evident că rezultatele precedente pot fi extinse pentru poligoane convexe inscriptibile oarecare.

Fie M,N,P,Q mijloacele patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$. Problema 150 din [2] cere să se arate că perpendicularele duse din M,N,P,Q pe latura opusă fiecărui punct ,sunt concurente.

Punctul de concurenţă T ,al acestor perpendiculare se numeşte anticentrul patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$ (vezi problema 289 din [3]).

Fie $\{S\}= MP\cap NQ$. Patrulaterul MNPQ este un paralelogram cu centrul în S. Perpendicularele din M,N,P,Q pe laturile respective sunt concurente în punctul O, centrul cercului circumscris patrulaterului.

Cum perpendicularele duse din M,N,P,Q pe laturile opuse sunt paralele cu perpendicularele duse prin M,N,P,Q pe laturile respective, rezultă că aceste perpendiculare se vor intersecta într-un punct T, simetricul lui O faţă de S. Soluţia acestei probleme ne ajută să determinăm afixul anticentrului T.

În adevăr, afixul lui S este $s = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$ de unde rezultă că afixul lui T este $t = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$.

Cum mijloacele segmentelor $(A_i H_i)$, i=1,2,3.4 au acelaşi afix t, rezultă că dreptele $A_i H_i$, i=1,2,3.4 sunt concurente în punctul T, anticentrul patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$. Punctul b) al problemei 290 din [3] ne cere să arătăm că punctul T aparţine cercurilor lui Euler al triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ respectiv $A_1A_2A_3$. Să arătăm că T se găseşte pe cercul lui Euler al triunghiului $A_1A_2A_3$ cercul Cum cercul lui Euler trece prin punctele A, B respectiv C mijloacele laturilor (A_1,A_2) , $(A_1 A_3)$,respectiv (A_2, A_3) , va trebui să arătăm că punctele T,A,B,C sunt conciclice, adică să arătăm că $\frac{b-t}{b-a} : \frac{c-t}{c-a} \in R$.

În adevăr $\frac{b-t}{b-a} : \frac{c-t}{c-a} = \frac{\frac{a_1+a_3}{2} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}}{\frac{a_1+a_3}{2} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}} : \frac{\frac{a_2+a_3}{2} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}}{\frac{a_2+a_3}{2} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}} =$

$$\frac{a_2+a_4}{a_2-a_3} : \frac{a_1+a_4}{a_1-a_3} = \frac{a_2-(-a_4)}{a_2-a_3} : \frac{a_1-(-a_4)}{a_1-a_3}.$$

Deoarece $-a_4^1$ este afixul punctului A_4^1 simetricul lui A_4 faţă de O, rezultă că punctele A_1,$A2_2$,$A3_3$, A_4^1 sunt conciclice. Deci $\frac{a_2-(-a_4)}{a_2-a_3} : \frac{a_1-(-a_4)}{a_1-a_3} \in \mathbf{R}$, ceea ce arată că

$\frac{b-t}{b-a}:\frac{c-t}{c-a}\in R$ şi deci punctele T,A,B,C sunt conciclice. Analog se arată că punctul T aparţine cercurilor lui Euler a celorlalte triunghiuri.

Bibliografie:

[1] M. DINCĂ şi M.CHIRIŢĂ ,Numerele complexe în matematica din liceu, 1996, Editura ALL EDUCAŢIONAL.

[2] MORUZOVA E.A ,Olimpiadele internaţionale de matematică ,EDITURA TEHNICĂ, 1978.

[3] ŢIŢEICA G. ,Probleme de geometrie, EDITURA TEHNICĂ, 1981.

Prof. MARCEL CHIRIŢĂ – Bucureşti.

Prof LUPULESCU ION – Tg. Jiu.

7. DESPRE FOLOSIREA NOȚIUNII DE MODUL

S-a constatat că, la terminarea studiului algebrei elementare, cei mai mulți dintre elevi nu au o idee clară despre noțiunea de modul (valoarea absolută) al unui număr real și, mai ales, nu știu să folosească această noțiune în abordarea unor probleme mai complexe. Aceasta se explică prin faptul că în școala gimnazială nu se acordă suficientă atenție acestei noțiuni concretizată prin exerciții și probleme aplicative.

Definiția corectă a modulului unui număr real este:

$|x| = x$ **dacă** $x > 0$; $|x| = 0$, **dacă** $x=0$; $|x| = -x$ **dacă** $x < 0$, **unde** $x \in \mathbb{R}$

Exemple: $\left|+\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$;

$\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$;

$\left|+\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$, pentru că $\sqrt{2}-1>0$;

$\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$, pentru că $1-\sqrt{2}<0$;

Noțiunea de modul introdusă la clasa a VI-a, după care, modulul unui număr întreg ar fi acel număr luat fără semn (consecință a interpretării geometrice), poate fi folosită cel mult în cazul calculelor numerice. În general, numai definiția data mai sus poate fi folosită.

Propun în acest articol câteva exerciții și probleme care, dacă ar fi tratate la clasă la timpul potrivit, ar asigura înțelegerea mai clară a acestei noțiuni și folosirea ei corectă în diferite contexte matematice.

A1. Să se rezolve ecuația:

$|x-1|+|x-3| = 4, x \in \mathbb{R}$

Se impune studierea semnului expresiilor x-1 și x-3

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
x-1	− − − − − − − − − −	0 + + + + + + + +	+ + + + + + +	
x-3	− − − − − − − − − −	− − − − − − − − − − − − 0	+ + + + + + +	

Rezultă astfel 3 cazuri:

a) Pentru $x \in (-\infty;3)$ $|x-1| = -x+1, |x-3| = -x+3$, ecuația devine:

-x+1-x+3=4 $\Leftrightarrow$ -2x+4= 4 $\Leftrightarrow$ -2x=0 $\Leftrightarrow$ x=0; $0 \in (-\infty;1) \Leftrightarrow 0 \in S$

b) Pentru $x \in [1;3]$ $|x-1| = +x-1, |x-3| = -x+3$, ecuația devine:

+x-1-x+3=4 $\Leftrightarrow$ 2=4 (F), ecuația nu are soluție pe acest domeniu;

c) Pentru $x \in (3;+\infty)$ $|x-1| = +x-1, |x-3| = +x-3$, ecuația devine:

+x-1+x-3=4 $\Leftrightarrow$ 2x- 4=4 $\Leftrightarrow$ 2x=8 $\Leftrightarrow$ x=4; $4 \in (3;+\infty) \Leftrightarrow 4 \in S$

Deci, $S = \{0;4\}$

Observație: Foarte utilă este interpretarea geometrică; pe axa numerelor $|x-a|$ este distanța de la punctul de abscisă x la punctul de abscisă a. Ecuația de mai sus corespunde problemei practice de a găsi punctele de pe axa numerelor pentru care suma distanțelor de la acesta la punctele de abscisă 1 și 3 este constantă (egală cu 4). Evident, între punctele de abscisă 1 și 3 nu se va găsi niciun punct care să satisfacă acestă cerință deoarece, pentru acestea suma este egală cu 2. Problema admite ca soluții două puncte simetrice în raport cu mijlocul segmentului $[1;3]$.

După acest model se rezolvă ecuațiile de forma:

$|x-a|\pm|x-b|\pm|x-c|\pm.....\pm|x-n|=k$ cu a, b, c,….,k$\in\mathbb{R}$

A2. Problema se poate complica puțin introducând un parametru real. De exemplu:

Să se discute ecuația:

$|x-1|+|x-3|=a, x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$ **, a parametru real**

Rezultă astfel 3 cazuri:

Dacă a<2 ecuația nu are nicio soluție;

Dacă a=2 ecuația are $S=[1;3]$;

Dacă a >2 ecuația are două soluții $x_1=\frac{4+\alpha}{2}$; $x_2=\frac{4-\alpha}{2}$.

A3. Să se rezolve inecuația:

$|x-1|-|x-4|>1$

Se impune studierea semnului expresiilor x-1 și x-4

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
x-1	– – – – – – – – – –	0 + + + + + + + + +		+ + + + + + +
x-4	– – – – – – – – – –		– – – – – – – – – – – – – – – 0	+ + + + + + +

Rezultă astfel 3 cazuri:

a) Pentru x$\in(-\infty;1)$

$|x-1|=-x+1, |x-4|=-x+4$, inecuația devine:

-x+1-(-x+3)>1 $\Leftrightarrow$ -x+1+x-4>1 $\Leftrightarrow$ -3>1 (F) $\Leftrightarrow$ $S=\phi$

b) Pentru x$\in[1;4]$

$|x-1|=+x-1, |x-4|=-x+4$, inecuația devine:

+x-1-(-x+4)>1 $\Leftrightarrow$ +x-1+x-4>1 $\Leftrightarrow$ 2x-5>1 $\Leftrightarrow$ 2x>6 $\Leftrightarrow$ x>3 $\Leftrightarrow x\in(3;+\infty)\Rightarrow S=[1;4]\cap(3;+\infty)=(3;4]$

c) Pentru x$\in(4;+\infty)$

$|x-1|=+x-1, |x-4|=+x-4$, inecuația devine:

+x-1-(+x-3)>1 $\Leftrightarrow$ +x-1-x+3>1 $\Leftrightarrow$ 2>1 (A) pentru orice x$\in(4;+\infty)\Leftrightarrow$ $S=(4;+\infty)$

Deci, $S=(3;4]\cup(4;+\infty)=(3;+\infty)$

4. Aplicații imediate:

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $|x-3|=1$

b) $|x|=|x-1|$

c) $|x-a|=|x-b|$, **a,b**$\in\mathbb{R}$

d) $|x|<1$

e) $|x-1|<2$

f) $|x-1|>|x-3|$

Se pot propune, sporind astfel gradul de dificultate, și altfel de ecuații și inecuații:

$|x^2-4|=3$; $|x^2-x|=3$; $|x^2-5x+6|+|x^2-x|=6$; $|x^2-1|+|x^2-4|=3$ ș.a.m.d.

Folosind geometria analitică (ecuația dreptei) se pot propune probleme în care să se ceară reprezentarea în sistem de axe de coordonate soluțiile următoarelor ecuații:

(1) $|x|=1$

(2) $|x|-|y|=1$

(3) $|x|+y=1$

(4) $|x-y|=1$

Analog,

(5) $|y|=1$

(6) $-|x|+|y|=1$

(7) $x+|y|=1$

(8) $|y-x|=1$

Exercițiile de până aici sunt artificiale totuși. Iată câteva probleme de geometrie analitică în care noțiunea de modul intervine în mod firesc.

A5. În triunghiul isoscel ΔABC cu $[AB]\equiv[AC], M\in(BC)$ se consideră $MP\,||\,BA, P\in AC; MN\,||\,AC, N\in AB$. Să se demonstreze că dacă M descrie dreapta BC, suma sau diferența segmentelor $[MP]si[MN]$ este constantă.

Soluția poate fi dată analitic. Considerăm un sistem de axe de coordonate și punctele: $B(-a;0); C(a;0); A(0;h); M(\alpha;0)$ unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ecuațiile dreptelor MP și AC sunt:

MP: $y=\frac{h}{a}(x-a)$

AC: $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}-1=0$

$MP\cap AC=\{P\}$, coordonatele punctului $P\left(x=\frac{\alpha+a}{2};y=\frac{h}{a}(a-\alpha)\right)$ iar de aici se obține pentru distanța MP expresia:

$$MP=\sqrt{\frac{(a-\alpha)^2\cdot(a^2+h^2)}{4a^2}}=|a-\alpha|\cdot\sqrt{\frac{(a^2+h^2)}{4a^2}}=|a-\alpha|\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2a}$$

Observație: Greșeala frecventă a elevilor este că scriu $\sqrt{(a-\alpha)^2}=a-\alpha$. Ar fi corect doar dacă $a-\alpha\geq 0$. Amintesc că $\sqrt{x^2}=|x|$

Analog, înlocuind a cu –a se obține expresia pentru MP.

$MP=|a+\alpha|\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2a}$. Trebuie să determinăm semnele expresiilor $|a-\alpha|;|a+\alpha|$

α	$-\infty$	-a	+a	$+\infty$
a-α	+ + + + + + + + +	+ + + + + + 0	– – – – – – – – – – - -	
a+α	– – – – – – – – – –	0 + + + + + + +	+ + + + + + +	

Obținem următoarele cazuri:

Cazul 1) $\alpha<-a$ (M este la stânga punctului B) , de aici

$|a-\alpha|=a-\alpha;|a+\alpha|=-a-\alpha\Rightarrow$ MP = (a -α)f , MN = -(a+α)f, unde am notat f = $\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2a}$.

Efectuând scăderea MP – MN= (a -α)f +(a+α)f = 2af = $\sqrt{a^2+h^2}$ (constantă).

Cazul 2) $-a\leq\alpha\leq a$ (M este între B și C)

În acest caz $|a-\alpha|=a-\alpha;|a+\alpha|=a+\alpha\Rightarrow$ MP = (a -α)f , MN = (a+α)f,

Efectuând suma lor MP+MN = (a -α)f +(a+α)f = 2af = $\sqrt{a^2+h^2}$ (constantă).

Cazul 3) $\alpha>a$ (M se află la dreapta punctului C)

$|a-\alpha|=-a+\alpha;|a+\alpha|=a+\alpha\Rightarrow$ MP = (α - a)f , MN = (a+α)f

Efectuând scăderea MP – MN= (α - a)f -(a+α)f = 2af = $\sqrt{a^2+h^2}$ (constantă) .

CONCLUZIE FINALĂ:

- Dacă M este între B şi C atunci suma segmentelor este constantă.
- Dacă M este pe dreapta BC, în exteriorul segmentului $[BC]$, diferența segmentelor este constantă.
- Dacă M coincide cu B sau C, unul din segmente se reduce la un punct iar celălalt coincide cu lungimea laturii congruente a triunghiului isoscel AB sau AC.

A6. În triunghiul isoscel ΔABC **cu** $[AB]\equiv[AC], M\in(BC)$ **se consideră** $MN\perp BA, N\in AB; MP\perp AC, P\in AC$**. Să se demonstreze că dacă M descrie dreapta BC, suma sau diferența segmentelor** $[MP] si [MN]$ **este constantă.**

Soluția poate fi dată analitic. Considerăm un sistem de axe de coordonate şi punctele: $B(-a;0); C(a;0); A(0;h); M(\alpha;0)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Obținem că

$MN=\frac{h\cdot|\alpha+a|}{\sqrt{h^2+a^2}}$; $MP=\frac{h\cdot|\alpha-a|}{\sqrt{h^2+a^2}}$ (analog înlocuind a cu –a)

Ecuația dreptei AB este: $hx-ay+ah=0$ sau forma normală $\frac{hx-ay+ah}{\sqrt{a^2+h^2}}=o$.

Se impune stabilirea semnelor expresiilor $\alpha+a$ şi $\alpha-a$

Obținem următoarele cazuri:

Cazul 1) $\alpha<-a$ (M este la stânga punctului B) , de aici

$|a-\alpha|=a-\alpha; |a+\alpha|=-a-\alpha\Rightarrow$ distanțele devin:

$MN=\frac{h\cdot(-\alpha-a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$

$MP=\frac{h\cdot(-\alpha+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$ Efectuând diferența, rezultă: $MP-MN=\frac{2ah}{\sqrt{h^2+a^2}}(const.)$

Cazul 2) $-a\le\alpha\le a$ (M este între B şi C)

În acest caz $|a-\alpha|=a-\alpha; |a+\alpha|=a+\alpha\Rightarrow$ distanțele devin

$MN=\frac{h\cdot(\alpha+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$

$MP=\frac{h\cdot(-\alpha+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$. Efectuând suma, rezultă: $MP+MN=\frac{2ah}{\sqrt{h^2+a^2}}(const.)$

Cazul 3) $\alpha>a$ (M se află la dreapta punctului C)

$|a-\alpha|=-a+\alpha; |a+\alpha|=a+\alpha\Rightarrow$ distanțele devin :

$MN=\frac{h\cdot(\alpha+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$

$MP=\frac{h\cdot(\alpha-a)}{\sqrt{h^2+a^2}}$. Efectuând diferența, rezultă: $MP-MN=\frac{2ah}{\sqrt{h^2+a^2}}(const.)$

Observații:

1) Constanta nu este altceva decât distanța de la B la AC.
2) Această propoziție se demonstrează ușor pe cale elementară cu ajutorul ariilor:

Notăm cu b - lungimea laturilor congruente ale triunghiului, cu u și v –distanțele de la M la laturile congruente. Exprimăm relația între ariile triunghiului

$A_{\Delta ABM} + A_{\Delta AMC} = A_{\Delta ABC}$

$\frac{b \cdot u}{2} + \frac{b \cdot v}{2} = \frac{b \cdot i}{2}, u + v = i$, unde i este lungimea înălțimii din B.

Când M este în exteriorul segmentului $[BC]$, avem:

$A_{\Delta ABM} - A_{\Delta ACM} = A_{\Delta ABC}, unde \ |u - v| = i$

BIBLIOGRAFIE:

1. ***Gazeta matematică*** – vol. XIII (LXVI);
2. Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI-a, Ed. Didactică și pedagogică, R.A., București, 1994

PROFESOR CAMELIA GRIGORAȘ
ȘCOALA "PETRU PONI", IAȘI

8. Problema lunii iulie 2012 (www.mateinfo.ro)

Autor: Prof. Gheorghe ROTARIU, Grupul Şcolar „Al. Vlahuţă" Şendriceni, judeţul Botoşani

Fie:

$$p_1 = \sin 6^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 78^\circ \cdot \sin 222^\circ \cdot \sin 246^\circ;$$
$$p_2 = \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 78^\circ \cdot \cos 210^\circ \cdot \cos 222^\circ.$$

1. Calculaţi:

$$\int_1^3 \frac{\ln\left(32 p_1 \cdot x + 2\right)}{x^2 + \frac{64\sqrt{3}}{3} p_2 \cdot x + 15} dx$$

2. Arătaţi că:

$$\frac{\sum_{k=1}^{7}\cos^{6}\theta_k\cdot\sin^{8}\theta_k}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^{8}\theta_k}+\frac{1}{\sin^{8}\theta_k}\right)}\le\frac{6^3}{7^7}.$$

unde $\theta_k\in\left\{6^\circ,30^\circ,66^\circ,78^\circ,210^\circ,222^\circ,246^\circ\right\}$, $k=\overline{1,7}$, $\theta_i\neq\theta_j$, $\forall i\neq j$, $i,j=\overline{1,7}$

(θ_k ia pe rând una din cele şapte valori).

Soluţie autor:

Vom calcula mai întâi p_1 şi p_2. Transformarea în radiani ne conduce la:

$$12^\circ\mapsto\frac{\pi}{30};\quad 30^\circ\mapsto\frac{\pi}{6};\ 78^\circ\mapsto\frac{13\pi}{30};\quad 222^\circ\mapsto\frac{37\pi}{30};\quad 246^\circ\mapsto\frac{41\pi}{30}$$

$$66^\circ\mapsto\frac{11\pi}{30};\quad 210^\circ\mapsto\frac{7\pi}{6}.$$

Avem:

$$\sin 5\cdot\frac{\pi}{30}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$
$$\sin 5\cdot\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$
$$\sin 5\cdot\frac{13\pi}{30}=\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$
$$\sin 5\cdot\frac{37\pi}{30}=\sin\frac{37\pi}{6}=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$
$$\sin 5\cdot\frac{41\pi}{30}=\sin\frac{41\pi}{6}=\sin\left(6\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}.\qquad(*)$$

Avem următoarea formulă trigonometrică (de liniarizare a unei puteri a sinusului):

$$\sin^5 x=\frac{10\sin x-5\sin 3x+\sin 5x}{16}\Rightarrow\sin 5x=16\sin^5 x+5\sin 3x-10\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}\qquad(1)$$

Dar, ştim că: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Înlocuind (2) în (1), vom avea:

$$\sin 5x = 16\sin^5 x + 5\sin 3x - 10\sin x \Rightarrow \sin 5x = 16\sin^5 x + 5\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) - 10\sin x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin 5x = 16\sin^5 x + 15\sin x - 20\sin^3 x - 10\sin x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \qquad (3)$$

Relaţiile $(*)$ exprimă, de fapt, că $\frac{\pi}{30}, \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{30}, \frac{37\pi}{30}$ şi $\frac{41\pi}{30}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $\sin 5x = \frac{1}{2}$, adică soluţii ale ecuaţiei:

$$16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x - \frac{1}{2} = 0 \qquad (4)$$

Cu substituţia $\sin x = t$, ecuaţia (4) devine:

$$16t^5 - 20t^3 + 5t - \frac{1}{2} = 0 \qquad (5)$$

Cum $\sin\frac{\pi}{30} \neq \sin\frac{\pi}{6} \neq \sin\frac{13\pi}{30} \neq \sin\frac{37\pi}{30} \neq \sin\frac{41\pi}{30} \Rightarrow$ soluţiile ecuaţiei (5) sunt:

$$t_i \in \left\{ \sin\frac{\pi}{30}, \sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{13\pi}{30}, \sin\frac{37\pi}{30}, \sin\frac{41\pi}{30} \right\},\ i = \overline{1,5}$$

Din ultima relaţie a lui *Viète*, avem:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = -\frac{-\frac{1}{2}}{16} = \frac{1}{32} \qquad (6)$$

adică:

$$p_1 = \sin\frac{\pi}{30} \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{13\pi}{30} \cdot \sin\frac{37\pi}{30} \cdot \sin\frac{41\pi}{30} = \frac{1}{32}.$$

Pentru calculul lui p_2 vom urma un raţionament asemănător celui anterior, pornind de la formula trigonometrică:

$\cos^5 x = \frac{10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x}{16} \Rightarrow \cos 5x = 16\cos^5 x - 5\cos 3x - 10\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (7)$ Ştim însă că avem: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (8)$

Înlocuind (8) în (7), vom avea:

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 5\cos 3x - 10\cos x \Rightarrow \cos 5x = 16\cos^5 x - 5\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) -$$
$$-10\cos x \Rightarrow \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 15\cos x - 10\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \quad (9)$$

Dacă în relaţiile $(*)$ înlocuim funcţia sinus cu funcţia cosinus, avem:

$$\cos 5\cdot\frac{\pi}{30} = \cos 5\cdot\frac{11\pi}{30} = \cos 5\cdot\frac{13\pi}{30} = \cos 5\cdot\frac{7\pi}{6} = \cos 5\cdot\frac{37\pi}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Echivalent, repetând raţionamentul anterior, cu faptul că ecuaţia:

$$16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (10)$$

care devine, cu substituţia $\cos x = t$:

$$16t^5 - 20t^3 + 5t - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (11)$$

are ca soluţii mulţimea: $S = \left\{\cos\frac{\pi}{30}, \cos\frac{11\pi}{30}, \cos\frac{13\pi}{30}, \cos\frac{7\pi}{6}, \cos\frac{37\pi}{30}\right\}$.

Ultima relaţie a lui *Viète*, ne dă:

$$p_2 = \cos\frac{\pi}{30}\cdot\cos\frac{11\pi}{30}\cdot\cos\frac{13\pi}{30}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\frac{37\pi}{30} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Cu p_1 şi p_2 calculaţi, integrala devine:

$$\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x^2+2x+15}\,dx$$

Comentariu. Integralele de tipul $\int_a^b \frac{\ln(mx+n)}{x^2+px+q}dx$ sunt destul de rar întâlnite atât în cadrul concursurilor de matematică dar şi în literatura de specialitate. De aceea, pentru a remedia pe cât posibil acest neajuns, vă recomand articolul d-lui profesor Mihai Dicu (Colegiul Naţional „Fraţii Buzeşti", Craiova) din revista *Recreaţii Matematice*, Nr.1, Ianuarie-iunie 2011, intitulat „*Asupra calculării unor integrale definite*".

Revenim la integrala dată: $I=\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x^2+2x+15}dx$

Facem schimbarea de variabilă (substituţia): $x=\frac{-2t+11}{t+2}=\varphi(t)$.

Noile limite de integrare vor fi: $\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=3; \\ x=3\Rightarrow t=1. \end{array}$

Diferenţiem formal în substituţie:

$$x=\frac{-2t+11}{t+2}\Rightarrow dx=\left(\frac{-2t+11}{t+2}\right)'dt\Rightarrow dx=\frac{-15}{(t+2)^2}dt.$$

$$x+2=\frac{15}{t+2} \text{ şi } x^2+2x+15=\frac{15(t^2+2t+15)}{(t+2)^2}.$$

Cu acestea, integrala devine:

$$I=\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x^2+2x+15}dx=\int_3^1 \frac{\ln 15-\ln(t+2)}{15\left(t^2+2t+15\right)}\cdot(t+2)^2\cdot\frac{-15}{(t+2)^2}dt=$$

$$=\int_1^3 \frac{\ln 15-\ln(t+2)}{t^2+2t+15}dt=\ln 15\int_1^3 \frac{1}{t^2+2t+15}dt-\int_1^3 \frac{\ln(t+2)}{t^2+2t+15}dt=$$

$$=\ln 15\int_1^3 \frac{1}{t^2+2t+15}dt-I\Rightarrow 2I=\ln 15\int_1^3 \frac{1}{t^2+2t+15}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln 15\int_1^3 \frac{1}{t^2+2t+15}dt=\frac{1}{2}\ln 15\int_1^3 \frac{(t+1)'}{(t+1)^2+14}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 15\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}arctg\left.\frac{t+1}{\sqrt{14}}\right|_1^3=\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\sqrt{15}\left(arctg\frac{4}{\sqrt{14}}-arctg\frac{2}{\sqrt{14}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\sqrt{15}\,arctg\frac{\frac{4}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{14}}}{1+\frac{4}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}}=\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\sqrt{15}\,arctg\frac{\frac{\sqrt{14}}{7}}{\frac{11}{7}}=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\sqrt{15}arctg\frac{\sqrt{14}}{11}.$$

În concluzie, $I=\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x^2+2x+15}dx=\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\sqrt{15}\,arctg\frac{\sqrt{14}}{11}$.

2. Pentru orice valoare (din cele şapte) a lui θ, avem $\cos\theta\neq 0$, $\sin\theta\neq 0$.

Vom demonstra, mai întâi, că oricare ar fi $\theta\in\mathbb{R}$, astfel încât $\cos\theta\neq 0$, $\sin\theta\neq 0$, avem:

$$\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}\geq 8 \qquad (12)$$

$$\cos^6\theta\cdot\sin^8\theta\leq\frac{3^3\cdot 4^4}{7^7} \qquad (13)$$

Demonstrăm inegalitatea (12). Pentru aceasta aplicăm două inegalităţi: a lui *Cauchy-Buniakovski-Schwartz* (C.B.S) şi a lui *Bergström* (B).

Comentariu. Chiar dacă apare mai puţin în manualele şcolare, şi aici, în mod eronat, ca un caz particular al inegalităţii C.B.S., ea fiind o inegalitate distinctă, dar echivalentă cu inegalitatea C.B.S, inegalitatea lui *Bergström* este deseori utilizată în cadrul concursurilor şcolare sau olimpiadelor din diverse ţări. O reamintim:

Inegalitatea lui Bergström (B):

Oricare ar fi $x_k \in \mathbb{R},\ y_k \in (0,\infty),\ k=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N}^*$, *are loc:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k}.$$

Avem:

$$\left(1^2+1^2\right)\left(\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2\right)\overset{(C.B.S)}{\geq}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1^2}{\cos^2\theta}+\frac{1^2}{\sin^2\theta}\right)^2\overset{(B)}{\geq}\left(\frac{(1+1)^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right)^2=16\Rightarrow\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}\geq 8 \qquad \square$$

De aici:

$$\left(1^2+1^2\right)\left(\left(\frac{1}{\cos^4\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin^4\theta}\right)^2\right)\overset{(C.B.S)}{\geq}\left(\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}\right)^2\overset{(12)}{\geq}8^2=64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^8\theta}+\frac{1}{\sin^8\theta}\geq 32\Rightarrow\frac{1}{\cos^8\theta}+\frac{1}{\sin^8\theta}\geq 2^5$$

Pentru a demonstra inegalitatea (13) vom aplica inegalitatea mediilor $(AM-GM)$:

$$\cos^6\theta\cdot\sin^8\theta=3^3\cdot4^4\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sin^2\theta}{4}\cdot\frac{\sin^2\theta}{4}\cdot\frac{\sin^2\theta}{4}\cdot\frac{\sin^2\theta}{4}\overset{(AM-GM)}{\leq}$$

$$\overset{(AM-GM)}{\leq}3^3\cdot4^4\left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\sin^2\theta}{4}+\frac{\sin^2\theta}{4}+\frac{\sin^2\theta}{4}+\frac{\sin^2\theta}{4}}{7}\right)^7=$$

$$=3^3\cdot4^4\cdot\frac{1}{7^7}=\frac{3^3\cdot4^4}{7^7}\Rightarrow\cos^6\theta\cdot\sin^8\theta\leq\frac{3^3\cdot4^4}{7^7} \qquad \square$$

Aceste două inegalităţi le vom aplica pentru cele şapte valori distincte ale lui θ. Avem:

$$\frac{\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k}+\frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)}\le 7\cdot\frac{3^3\cdot 4^4}{7^7}=\frac{3^3\cdot 4^4}{7^6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^5}=\frac{3^3\cdot 2^8}{7^7\cdot 2^5}=\frac{(3\cdot 2)^3}{7^7}=\frac{6^3}{7^7}\quad\square$$

Alte soluţii:

1. Prof.Păcurar Cornel-Cosmin,Col. Naţ. I.M.C.Blaj

1. Folosind formulele de reducere la primul cadran obţinem p_1=sin6°sin30°sin78°sin222°sin246°=

= $\frac{1}{2}$ ·sin6°sin42°sin66°sin78° şi p_2= cos6°cos66°cos78°cos210°cos222° =

= $\frac{\sqrt{3}}{2}$·cos6°cos42°cos66°cos78°.

Folosind formulele de transformare a produselor în sume obţinem sin6°sin66° = $\frac{\cos60^\circ-\cos72^\circ}{2}$ =

= $\frac{1-2\cos72^\circ}{4}$, sin78°sin42° = $\frac{\cos36^\circ-\cos120^\circ}{2}=\frac{\cos36^\circ+\cos60^\circ}{2}=\frac{2\cos36^\circ+1}{4}$,
cos6°cos66°= $\frac{\cos72^\circ+\cos60^\circ}{2}=\frac{2\cos72^\circ+1}{4}$ şi cos42°cos78°=
$\frac{\cos36^\circ+\cos120^\circ}{2}=\frac{\cos36^\circ-\cos60^\circ}{2}=\frac{2\cos36^\circ-1}{4}$.

Obţinem $p_1=\frac{1}{32}(1-2\cos72^\circ)(2\cos36^\circ+1)$ şi $p_2=\frac{\sqrt{3}}{32}(2\cos72^\circ+1)(2\cos36^\circ-1)$.

Fie cos72° = a,cos36° = b.Din 0°<36°<90°$\Longrightarrow$1>b>0.

Din cos72°cos36° = $\frac{\cos108^\circ+\cos36^\circ}{2}=\frac{\cos36^\circ-\cos72^\circ}{2}\Longrightarrow ab=\frac{b-a}{2}\Longrightarrow 2ab=b-a$.

Din cos72° = $2\cos^2 36^\circ-1\Longrightarrow a=2b^2-1$.

Din 2ab = b−a şi $a=2b^2-1\Longrightarrow 2b(2b^2-1)=b-b^2+1\Leftrightarrow 4b^3+2b^2-3b-1=0\Leftrightarrow$

$(b-1)(4b^2-2b-1)=0 \Leftrightarrow b_1=1, b_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Cum $b\in(0,1) \Rightarrow b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Din $a=2b^2-1$ şi $b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Obţinem $p_1=\frac{1}{32}\left(1-2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}+1\right)=\frac{1}{32}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{32}$ şi

$p_2=\frac{\sqrt{3}}{32}\cdot\left(2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\right)\left(2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Fie $I=\int_1^3 \frac{\ln(32p_1\cdot x+2)}{x^2+\frac{64\sqrt{5}}{5}p_2\cdot x+15}dx$. Considerând schimbarea de variabilă $x=y-2 \Rightarrow I=\int_3^5 \frac{\ln y}{y^2-2y+15}dy$.

Considerând schimbarea de variabilă $y=\sqrt{15}z \Rightarrow I=\sqrt{15}\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}} \frac{\ln(\sqrt{15}z)}{15z^2-2\sqrt{15}z+15}dz=$

$=\frac{\sqrt{15}\ln\sqrt{15}}{15}\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{1}{z^2-\frac{2z}{\sqrt{15}}+1}dz+\frac{\sqrt{15}}{15}\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{\ln z}{z^2-\frac{2z}{\sqrt{15}}+1}dz=\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}I_1+\frac{1}{\sqrt{15}}I_2$.

$I_1=\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{1}{z^2-\frac{2z}{\sqrt{15}}+1}dz=\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2+\frac{14}{15}}dz=\sqrt{\frac{15}{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}t-1}{\sqrt{14}}\Bigg|_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}=$

$\sqrt{\frac{15}{14}}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{14}}-\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

$I_2=\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{\ln z}{z^2-\frac{2z}{\sqrt{15}}+1}dz$. Considerând schimbarea de variabilă $z=\frac{1}{t} \Rightarrow I_2=$

$-\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{3}}\frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{15}}\frac{1}{t}+1}\cdot\frac{1}{t^2}dt=$

$=-\int_{\frac{3}{\sqrt{15}}}^{\frac{5}{\sqrt{15}}}\frac{\ln t}{t^2-\frac{2t}{\sqrt{15}}+1}dt=-I_2 \Rightarrow I_2=-I_2 \Rightarrow I_2=0$.

Obţinem $I=\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{14}}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{14}}-\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

2.Avem $\frac{\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k}+\frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)}\leq\frac{6^8}{7^7}\Leftrightarrow 7^7\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k\leq 6^8\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k}+\frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)$ (r_1).

Din $-1\leq\cos\theta_k\leq 1\Rightarrow 0\leq\cos^6\theta_k\leq 1$ şi din $-1\leq\sin\theta_k\leq 1\Rightarrow 0\leq\sin^8\theta_k\leq 1$.

Din $0\leq\cos^6\theta_k\leq 1$ şi $0\leq\sin^8\theta_k\leq 1\Rightarrow 0\leq\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k\leq 1\Rightarrow 0\leq\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k\leq 7$ $\Rightarrow\Rightarrow\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k\leq 7^8\Rightarrow\sum_{k=1}^{7}\cos^6\theta_k\cdot\sin^8\theta_k\leq 5764801$ (r_2).

Evident că $\frac{1}{\cos^8\theta_k}\geq 0$ şi $\frac{1}{\sin^8\theta_k}\geq 0\Rightarrow\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k}+\frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)\geq\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{\sin^8\theta_k}\geq\frac{1}{\sin^8 6^\circ}$ (r_3).

Din $0°<36°<90°\Rightarrow 0<\sin 36°\Rightarrow\sin 36°=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=$ $\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$.

Avem $\sin 6°=\sin(36°-30°)=\sin 36°\cos 30°-\sin 30°\cos 36°=\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $=$

$=\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}{8}-\frac{1+\sqrt{5}}{8}$ (r_4).

Avem $\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}{8}=0{,}5090369604\ldots\ldots\leq 0{,}50903697$ (r_5).

Avem $\frac{1+\sqrt{5}}{8}=0{,}40450849718\ldots\ldots\geq 0{,}40450897$ (r_6).

Din (r_5) şi $(r_6)\Rightarrow\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}{8}-\frac{1+\sqrt{5}}{8}\leq 0{,}104528$ şi împreună cu $(r_4)\Rightarrow\sin 6°\leq$ $0{,}104528\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin^3 6°\leq 0{,}0000000142515\Rightarrow\sin^8 6°\leq 0{,}00000002\Rightarrow\frac{1}{\sin^8 6^\circ}\geq 50000000$ (r_7).

Din (r_3) şi $(r_7)\Rightarrow\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k}+\frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)\geq 50000000\Rightarrow$

$\Rightarrow 6^3 \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{\cos^8\theta_k} + \frac{1}{\sin^8\theta_k}\right) \geq 10800000000 \quad (r_8)$.

Evident că $5764801 \leq 10800000000 \quad (r_9)$.

Din $(r_9),(r_8)$ şi $(r_2) \Rightarrow 7^7 \sum_{k=1}^{7} \cos^6\theta_k \cdot \sin^8\theta_k \leq 6^3 \sum_{k-1}^{7} \left(\frac{1}{\cos^8\theta_k} + \frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)$ şi împreună cu $(r_1) \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{7} \cos^6\theta_k \cdot \sin^8\theta_k}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{\cos^8\theta_k} + \frac{1}{\sin^8\theta_k}\right)} \leq \frac{6^3}{7^7}$.

2.Inginer Ionut Valentin SANDULESCU

Fie: $p1 = sin6° * sin30° * sin78° * sin222° * sin246°$

$p2 = cos6° * cos66° * cos78° * cos210° * cos222°$

Rezolvare – Calculul celor doua produse p1 si p2 utilizate in rezolvarea celor 2 probleme propuse

$$p1 = \frac{1}{2} * sin6° * sin78° * sin222° * sin246°$$

Pentru calcul se utilzeaza formulele trigonometrice de transformare a produselor de sin si cos in sume si invers:

$$sin\alpha * sin\beta = \frac{1}{2} * [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha * cos\beta = \frac{1}{2} * [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$p1 = \frac{1}{2} * (sin6° * sin246°) * (sin78° * sin222°)$$

$$p1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * (cos240° - cos252°) * (cos144° - cos300°)$$

$$p1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2} - cos252°\right) * \left(cos144° - \frac{1}{2}\right)$$

$$p1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * (1 + 2 * cos252°) * (1 - 2 * cos144°)$$

$$p1 = \frac{1}{32} * (1 + 2 * cos252°) * (1 - 2 * cos144°)$$

$$p1 = \frac{1}{32} * (1 - 2 * cos144° + 2 * cos252° - 4 * cos144° * cos252°)$$

$$p1 = \frac{1}{32} * (1 - 2 * cos144° + 2 * cos252° - 2 * cos108° - 2 * cos396°)$$

$$p1 = \frac{1}{32} * [1 - 2 * (cos144° + cos396°) + 2 * (cos252° - cos108°)]$$

$$p1 = \frac{1}{32} * [1 - 4 * cos270° * cos252° - 4 * sin180° * sin144°]$$

$$cos270° = 0; \quad sin180° = 0$$

$$p1 = 1/32$$

Analog se face calculul produsului p2:

$$p2 = cos6° * cos66° * cos78° * cos210° * cos222°$$

$$p2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * (cos6° * cos66°) * (cos78° * cos222°)$$

$$p2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * (cos60° - cos72°) * (cos144° - cos300°)$$

$$p2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2} + cos252°\right) * (cos144° - \frac{1}{2})$$

$$p2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2}\right) * (1 + 2cos252°) * (1 - 2cos144°)$$

Se rezolva la fel ca la p1 si rezulta:

$$p2 = \sqrt{3}/32$$

Solutie problema 1:

Pentru:
$p1 = 1/32; p2 = \sqrt{3}/32$

Integrala devine:

$$\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x^2+2x+15} dx = \int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{(x+1)^2+14} dx = I$$

Facem schimbarea de variabila: $x + 2 = \frac{15}{y+1}; \qquad dx = -\frac{15}{(y+1)^2} dy$

$$x + 1 = \frac{15}{y+1} - 1 = \frac{14 - y}{y+1}$$

Limitele de integrare devin: $x=1 \rightarrow y=4$

$x=3 \rightarrow y=2$

Integrala devine:

$$\int_4^2 \frac{\ln\frac{15}{y+1}}{\frac{(14-y)^2}{(y+1)^2}+14} * \frac{-15}{(y+1)^2}dy = \int_4^2 \frac{\ln 15-\ln(y+1)}{\frac{(14-y)^2}{(y+1)^2}+14} * \frac{-15}{(y+1)^2}dy = \int_4^2 \frac{\ln 15-\ln(y+1)}{\frac{15(y^2+14)}{(y+1)^2}} * \frac{-15}{(y+1)^2}dy$$

$$\int_2^4 \frac{\ln 15-\ln(y+1)}{y^2+14}dy = \int_2^4 \frac{\ln 15}{y^2+14}dy - \int_2^4 \frac{\ln(y+1)}{y^2+14}dy = \frac{ln15}{\sqrt{14}}\left[arctg\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right) - arctg\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)\right] - I$$

Deci:

$$2I = \frac{ln15}{\sqrt{14}}\left[arctg\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right) - arctg\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)\right]$$

$$I = \frac{ln15}{2\sqrt{14}}\left[arctg\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right) - arctg\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)\right]$$

$$I = \frac{ln15}{2\sqrt{14}} arctg\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{14}}}{1+\frac{8}{14}}\right]$$

$$I = \frac{ln15}{2\sqrt{14}} arctg\left(\frac{\sqrt{14}}{11}\right)$$

$$I = .118650368$$

Solutie problema 2:

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 \sin\theta_k^8}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \le \frac{6^3}{7^7}$$

- Folosind in prima faza inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{14}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \le \sqrt[14]{\prod_{k=1}^{7} \cos\theta_k^8 \sin\theta_k^8}$$

$$\rightarrow \frac{14}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \le \sqrt[14]{p_2^{14}} \le p_2 = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Dar, $\prod_{k=1}^{7} cos\theta_k sin\theta_k \le p_1 p_2 \le p_2^2$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \leq \frac{\sqrt{3}}{7*2^6} \text{ relatia (1)}$$

$\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 \, sin\theta_k^8$ - cautam maximul aceste sume pentru $\theta_k \in [0;2\pi]$

Fie $f(x) = cos^6 x * sin^8 x$ $x \in [0;2\pi]$

Rezolvand ecuatia $\frac{df}{dx} = 0$ obtinem max f(x) pentru $cos^2 x = \frac{3}{7}$; $sin^2 x = \frac{4}{7}$;

$$\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 \, sin\theta_k^8 \leq 7 * \frac{3^3}{7^3} * \frac{4^4}{7^4} \left(= \frac{3^3 * 2^8}{7^6}\right) \text{ relatia(2)}$$

Din relatiile (1) si (2):

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 sin\theta_k^8}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \leq \frac{\sqrt{3}}{7*2^6} * \frac{3^3*2^8}{7^6}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 sin\theta_k^8}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \leq \frac{\sqrt{3}*3^3*2^2}{7^7} \leq \frac{2*3^3*2^2}{7^7}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} \cos\theta_k^6 sin\theta_k^8}{\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{cos\theta_k^8}+\frac{1}{sin\theta_k^8}\right)} \leq \frac{6^3}{7^7}$$

Coordonator concurs: Andrei Octavian Dobre
dobre.andrei@yahoo.com