

*MateInfo.ro*

*MATEmatică și INFOrmații  
din învățământul ROMânesc*

[www.mateinfo.ro](http://www.mateinfo.ro)

*Revista Electronică MateInfo.ro*  
(revistă lunară)

**IANUARIE 2013**

**ISSN 2065 – 6432**

ARTICOLE :

- |   |               |
|---|---------------|
| <b>1.SOLUȚII NOI PENTRU PATRU PROBLEME DIN G.M.-B<br/>ȘI O ÎNTĂRIRE</b>   | <b>Pag. 2</b> |
| <b>2. SOLUTIONS FOR TWO PROBLEMS (AND A REMARK ) FROM<br/>SSMJ OTHER THAN THOSE LISTED IN SSMJ – JANUARY 2013</b> | <b>Pag. 5</b> |
| <b>3. 17 SOLUȚII ȘI O GENERALIZARE PENTRU PROBLEMA L222<br/>DIN RECREAȚII MATEMATICE, NR. 1/2012</b>              | <b>Pag. 8</b> |

Coordonator: Andrei Octavian Dobre  
E-mail pentru articole:  
[revistaelectronica@mateinfo.ro](mailto:revistaelectronica@mateinfo.ro)

## 1. SOLUȚII NOI PENTRU PATRU PROBLEME DIN G.M.-B ȘI O ÎNTĂRIRE

**TITU ZVONARU, Comănești și NECULAI STANCIU, Buzău**

**E:14275.** Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$  și cu  $m(\angle B) = 60^\circ$ .

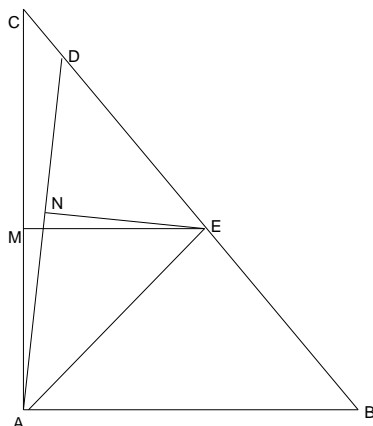
Fie  $D, E \in (BC)$  astfel încât  $m(\angle CAD) = 10^\circ$  și ( $AE$  este bisectoarea unghiului  $BAD$ ).

Arătați că  $[AD] \equiv [CE]$ .

*Mihai Monea, Deva*

Soluția acestei probleme, publicată în *G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 327* și aparținând *Cameliei Oprea* din Sibiu, face apel la teorema sinusurilor și la formula  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , lucruri pe care majoritatea elevilor din gimnaziu nu le știu.

Prezentăm în continuare o soluție care folosește doar cunoștințe accesibile unui elev din gimnaziu.



Din  $m(\angle CAD) = 10^\circ$  deducem că  $m(\angle BAD) = 80^\circ$  și cum ( $AE$  este bisectoarea) avem  $m(\angle EAD) = 40^\circ$ . Pe de altă parte, din  $\triangle BAD$  deducem că  $m(\angle ADB) = 40^\circ$ , așadar  $\triangle AED$  este isoscel cu  $AE = ED$  și  $m(\angle AED) = 100^\circ$ .

Fie  $M, N$  proiecțiile ortogonale ale punctului  $E$  pe dreptele  $AC$ , respectiv  $AD$ .

Avem  $m(\angle NEA) = 50^\circ$  și  $m(\angle MAE) = 50^\circ$ .

Rezultă ușor că triunghiurile dreptunghice  $ENA$  și  $AME$  sunt congruente, așadar

$AN = ME$ . Dar  $AN = \frac{AD}{2}$  (deoarece triunghiul  $AED$  este isoscel) și  $ME = \frac{CE}{2}$  (cateta care se opune unghiului de  $30^\circ$  este jumătate din ipotenuză), deci  $[AD] \equiv [CE]$ .

**E:14317.** Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$  și cu  $m(\angle B) = 60^\circ$ , iar  $D$  și  $E$  pe latura  $BC$  astfel încât  $m(\angle CAD) = 10^\circ$  și ( $AE$  este bisectoarea unghiului  $BAD$ ). Arătați că  $[AD] \equiv [CE]$ .

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetusa, Hunedoara

**Notă.** Alte trei soluții - de această dată ale problemei E:14317 din G.M.-B, nr. 3/2012, p.152 au fost date de Amelia Duca, în Didactica Matematică – Supliment al publicației Gazeta Matematică - Anul II, Nr. 1 /2012 pp. 9 – 11.

**26556.** Să se arate că:

$$3(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \geq (x + y + z)^2(xy + yz + zx)^2,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive  $x, y, z$ .

Viorel Cornea, Hunedoara

Soluția publicată în G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 341, folosește un artificiu foarte interesant, dar mai greu de intuit de către un elev.

Iată o soluție oarecum mai naturală.

Deoarece,

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3(x+y)^2}{4} \geq \frac{3(x+y)^2}{4},$$

scriind încă două inegalități similare, este suficient să demonstrăm că:

$$3 \cdot \frac{3(x+y)^2}{4} \cdot \frac{3(y+z)^2}{4} \cdot \frac{3(z+x)^2}{4} \geq (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Folosind identitatea,

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz,$$

avem de demonstrat că:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz,$$

care este inegalitatea lui *Cesaró* (se obține ușor prin înmulțirea inegalităților:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}, y+z \geq 2\sqrt{yz}, z+x \geq 2\sqrt{zx}).$$

**E:14303.** Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$ . Demonstrați că:

$$\frac{a(1+b+c) + c(1+a+b)}{a+c} \leq \sqrt{(1+a+b)(1+b+c)} \leq \frac{a(1+a+b) + c(1+b+c)}{a+c}.$$

Radu Ghenghiu, Oradea

Vom da acestei probleme o altă soluție decât cea prezentată în G.M.-B nr. 6-7-8 / 2012, p. 347.

Cu inegalitatea dintre media armonică și cea geometrică avem:

$$\frac{2ac}{a+c} \leq \sqrt{ac};$$

obținem că:

$$\frac{a(1+b+c) + c(1+a+b)}{a+c} = 1+b + \frac{2ac}{a+c} \leq 1+b + \sqrt{ac},$$

și atunci pentru inegalitatea din stânga este suficient să demonstrăm că:

$$(1+b + \sqrt{ac})^2 \leq (1+b+a)(1+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (1+b)^2 + ac + 2(1+b)\sqrt{ac} \leq (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + ac$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ac} \leq a+c, \text{ adevărată.}$$

Pentru inegalitatea din dreapta folosim inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică, i.e.

$$\frac{a+c}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}},$$

scrisă sub forma:

$$\frac{a+c}{2} \leq \frac{a^2+c^2}{a+c},$$

obținem că:

$$\frac{a(1+a+b)+c(1+b+c)}{a+c} = 1+b + \frac{a^2+c^2}{a+c} \geq 1+b + \frac{a+c}{2},$$

și este suficient să arătăm că:

$$(1+b+a)(1+b+c) \leq (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + ac \leq (1+b)^2 + (1+b)(a+c) + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4ac \leq (a+c)^2, \text{ evident adevărată.}$$

Avem egalitate în ambele părți dacă și numai dacă  $a=c$ .

**E:14278.** b) *Demonstrați că pentru orice numere reale  $a, b, c$  pozitive, nenule, pentru care  $a+b+c=1$ , este adevărată inegalitatea:*

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}.$$

*Adriana Dragomir, Oțelu Roșu*

O întărire a problemei E:14278 din G.M.-B 12/2011:

''*Demonstrați că pentru orice numere reale  $a, b, c$  pozitive, nenule, pentru care  $a+b+c=1$ , este adevărată inegalitatea:*

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{2(1+3b)}{c+a} + \frac{2(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

*Soluție.* Vom demonstra inegalitatea:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{a^3+2abc}{abc} \leq \frac{1}{bc} \quad (*)$$

Folosind faptul că  $a+b+c=1$ , inegalitatea (\*) se scrie succesiv:

$$\frac{2(4a+b+c)}{b+c} + \frac{a^2+2bc}{bc} \leq \frac{(a+b+c)^2}{bc}$$

$$\Leftrightarrow 8abc + 2bc(b+c) + a^2(b+c) + 2bc(b+c) \leq$$

$$\leq a^2(b+c) + (b^2+c^2)(b+c) + 2ab(b+c) + 2ac(b+c) + 2bc(b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-2bc) + 2ab^2 + 2ac^2 + 2abc + 2abc - 8abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 + 2a(b-c)^2 \geq 0, \text{ care este adevărată.}$$

Scriind încă două inegalități similare cu (\*), prin adunare obținem:

$$\frac{2(1+3a)}{b+c} + \frac{2(1+3b)}{c+a} + \frac{2(1+3c)}{a+b} + \frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

## 2. Solutions for two problems (and a remark ) from SSMJ other than those listed in SSMJ – January 2013

by Titu Zvonaru, Comănești, Romania and Neculai Stanciu, Buzău,  
Romania

- 5220: *Proposed by Tom Moore, Bridgewater State University, Bridgewater, MA*

The pentagonal numbers begin 1, 5, 12, 22... and are generally defined by

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \forall n \geq 1. \text{ The triangular numbers begin 1, 3, 6, 10, ... and are generally}$$

defined by  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$ . Find the greatest common divisor,  $\gcd(T_n, P_n)$ .

We analyze three cases:

i)  $n = \text{even}, n = 2k \Rightarrow P_n = k(6k-1), T_n = k(2k+1)$ .

If  $d|2k+1$ , and  $d|6k-1 \Rightarrow d|3(2k+1) - (6k-1) \Rightarrow d|4 \Rightarrow d \in \{1, 2, 4\}$ , but  $2k+1 = \text{odd}$ , so  $d = 1$  and  $\gcd(6k-1, 2k+1) = 1$ .

ii)  $n = 4k+1 \Rightarrow P_n = (4k+1)(6k+1), T_n = (4k+1)(2k+1)$ .

If  $d|2k+1$ , and  $d|6k+1 \Rightarrow d|3(2k+1) - (6k+1) \Rightarrow d|2 \Rightarrow d \in \{1, 2\}$ , but  $2k+1 = \text{odd}$ , so  $d = 1$  and  $\gcd(6k+1, 2k+1) = 1$ .

iii)  $n = 4k+3 \Rightarrow P_n = 2(4k+3)(3k+2), T_n = 2(4k+3)(k+1)$ .

If  $d|k+1$  and  $d|3k+2 \Rightarrow d|3(k+1) - (3k+2) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$ , so  $\gcd(3k+2, k+1) = 1$ .

Hence,

$$\gcd(P_n, T_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n, & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2n, & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} .$$

• 5221: Proposed by Michael Brozinsky, Central Islip, NY

If  $x, y$  and  $z$  are positive numbers find the maximum of

$$\frac{\sqrt{(x+y+z) \cdot xyz}}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2} .$$

The maximum is  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  (occurs for  $x = y = z$ ).

We give three solutions:

**Solution1.**

We have:

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2 \geq 12xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)^2 \geq 12xyz(x+y+z) .$$

Since:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx ,$$

is sufficient to show that:

$$4(xy + yz + zx)^2 \geq 12xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z) \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z) ,$$

which is true because is the inequality:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca ,$$

for  $a = xy, b = yz, c = zx$ .

**Solution2.**

Since  $x, y, z > 0$  there is a triangle with the lengths of the sides  $a, b, c$  such that:

$$x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{a+c-b}{2}, z = \frac{b+c-a}{2} ,$$

and then the inequality

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{12},$$

is exactly the Weitzenböck's inequality.

**Solution 3.** Using the *AM – GM* inequality and the inequality:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

we have that:

$$\begin{aligned} [(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2]^2 &\geq (4xy+4yz+4zx)^2 = 16(xy+yz+zx)^2 \geq \\ &\geq 16 \cdot 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = 48xyz(x+y+z), \end{aligned}$$

which is equivalent with

$$\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{12},$$

and we are done.

• **5218:** Proposed by Kenneth Korbin, New York, NY

Find positive integers  $x$  and  $y$  such that,

$$2x - y - \sqrt{3x^2 - 3xy + y^2} = 2013$$

with  $(x, y) = 1$ .

Denoting  $a = 2013$ , we have that:

$$2x - y - a = \sqrt{3x^2 - 3xy + y^2} \quad (1)$$

So,

$$\begin{aligned} (2x - y - a)^2 &= 3x^2 - 3xy + y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + a^2 - 4xy - 4ax + 2ay = 3x^2 - 3xy + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - (4a + y)x + a^2 + 2ay &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

For this equation to have natural roots its discriminant must be perfect square, i.e.

$$(4a + y)^2 - 4(a^2 + 2ay) = k^2, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 + 8ay + y^2 - 4a^2 - 8ay = k^2 \Leftrightarrow k^2 - y^2 = 12a^2 \Leftrightarrow (k - y)(k + y) = 12a^2.$$

Because  $k - y$  and  $k + y$  have the same parity (since their sum is  $2k$ ) and  $k - y < k + y$ , we deduce that:

$$\begin{cases} k - y = 2d_1 \\ k + y = 2d_2 \end{cases}, \text{ with } d_1 < d_2 \text{ and } d_1 d_2 = 3a^2.$$

Yields  $y = d_2 - d_1$ , and from (2) we obtain:

$$x_1 = \frac{4a + y + k}{2} = \frac{4a + 2d_2}{2} = 2a + d_2, \text{ and } x_2 = \frac{4a + y - k}{2} = \frac{4a - 2d_1}{2} = 2a - d_1.$$

But, for  $(x, y)$  to be a solution of the equation (1) it must that  $2x - y - a > 0$ .

Thus, for  $x = 2a - d_1$ ,  $y = d_2 - d_1$  we have that:

$$4a - 2d_1 - d_2 + d_1 - a > 0 \Rightarrow 3a = d_1 + d_2 \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{d_1 d_2} = 2\sqrt{3a^2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow 3 > 2\sqrt{3},$$

false.

So we have only possibility:

$$x = 2a + d_2, y = d_2 - d_1.$$

If  $\gcd(d_1, d_2) = p > 1$ , then  $p|a, p|d_1, p|d_2 \Rightarrow p|x$  and  $p|y$ , contradiction with  $(x, y) = 1$ , so  $\gcd(d_1, d_2) = 1$ .

**Remarks.** If  $a = \text{prime number}$  without the condition  $(x, y) = 1$ , then the equation

$2x - y - \sqrt{3x^2 - 3xy + y^2} = a$  has solutions:

$$(x, y) \in \{(3a^2 + 2a, 3a^2 - 1), (a^2 + 2a, a^2 - 3), (5a, 2a)\}.$$

### 3. 17 soluții și o generalizare pentru problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012

**Profesor Ioan Viorel Codreanu**

**Școala Gimnazială Satulung, Maramureș**

Într-o frumoasă notă apărută în revista **Recreații Matematice, nr. 2/2012**, **Titu Zvonaru** prezintă opt soluții pentru problema **L222** (**Titu Zvonaru**-6 soluții, **Daniel Văcaru**-o soluție și soluția autorului **Florin Stănescu**). Alte trei soluții (**Ioan Viorel Codreanu**-soluțiile 1, 2 și 3 din acest articol) nu au fost incluse în acea notă deoarece revista era definitivată la data primirii materialului. Scopul acestui articol este de a prezenta alte 17 soluții pentru problema **L222**, utilizând inegalitățile: **mediilor, Schur, Cauchy-Schwarz, Bergström, Cebîșev, Jensen, Gerretsen, Euler, procedeul mixing variables** și o **lemă** utilă în rezolvarea unor inegalități. Articolul se încheie cu o generalizare a problemei **L222**, pentru care vom prezenta două soluții.

**L222. Pentru  $a, b, c$  numere reale pozitive, demonstrați inegalitatea**

$$a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{18}{a+b+c} \quad (1)$$

**Florin Stănescu, Găești**



**Soluția 1.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem  $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{bc}$  și analogele ei.

Avem:

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 2 \sum \frac{a}{bc} = \frac{2}{\prod a} \cdot \sum a^2$$

și rămâne de arătat că

$$(\sum a^2)(\sum a) \geq 9 \prod a.$$

Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, avem:

$$(\sum a^2)(\sum a) \geq 3^3 \sqrt{(\prod a)^2} \cdot 3^3 \sqrt{\prod a} = 9 \prod a$$

și soluția se încheie.

**Soluția 2.** Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \sum \left( \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a}} \right) \geq \frac{\left(2 \sum \frac{1}{a}\right)^2}{2 \sum \frac{1}{a}} = 2 \sum \frac{1}{a}$$

și folosind **Inegalitatea MA-MH**,  $\left(\sum \frac{1}{a}\right)(\sum a) \geq 9$ , obținem (1).

**Soluția 3.** Putem să presupunem că  $a \leq b \leq c$  fără a restrânge generalitatea. Ca urmare,

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ . Aplicând **Inegalitatea Cebîșev**, obținem:

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{1}{3} (\sum a) \left( \sum \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right) = \frac{2}{3} (\sum a) \left( \sum \frac{1}{a^2} \right) \geq \frac{2}{9} (\sum a) \left( \sum \frac{1}{a} \right)^2 \geq 2 \sum \frac{1}{a} \geq \frac{18}{\sum a}$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**,  $(\sum a) \left( \sum \frac{1}{a} \right) \geq 9$  și **Inegalitatea Cauchy-**

**Schwarz**,

$$3 \sum \left( \frac{1}{a} \right)^2 \geq \left( \sum \frac{1}{a} \right)^2.$$

**Soluția 4.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \sum \left( \frac{a}{b^2} + \frac{a}{c^2} \right) \geq 6 \sqrt[6]{\prod \left( \frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{c^2} \right)} = \frac{6}{\sqrt[3]{\prod a}} \geq \frac{18}{\sum a}$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MG**,  $\sum a \geq 3 \sqrt[3]{\prod a}$ .

**Soluția 5.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem  $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{bc}$  și analogele ei.

Avem:

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 2 \sum \frac{a}{bc} = 2 \sum \frac{a^2}{abc}$$

Folosind **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$2 \sum \frac{a^2}{abc} \geq 2 \cdot \frac{(\sum a)^2}{\sum abc} = 2 \cdot \frac{(\sum a)^2}{3 \prod a}$$

și utilizând **Inegalitatea MA-MG** în forma  $(\sum a)^3 \geq 27 \prod a$ , obținem (1).

**Soluția 6.** Folosind **Inegalitatea MA-MG**, avem:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{c^2} \cdot \frac{c}{a^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

și

$$\frac{a}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{c^2} \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{c}{b^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Sumând aceste inegalități, deducem

$$\sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{6}{\sqrt[3]{abc}}$$

și folosind **Inegalitatea MA-MG**,  $\sum a \geq 3 \sqrt[3]{\prod a}$ , obținem (1).

**Soluția 7.** Putem să presupunem că  $\sum a = 1$  fără a restrânge generalitatea. Folosind binecunoscuta inegalitate  $\sum x^2 \geq \sum xy, \forall x, y, z \in R$ , obținem:

$$\sum b^2 c^2 \geq \sum bcca = abc \sum a = abc$$

care împreună cu **Inegalitatea Schur** (în cazul particular  $\sum a = 1$ ),  $\sum ab \leq \frac{1+9\prod a}{4}$  și

**Inegalitatea MA-MG** în forma  $\prod a \leq \left(\frac{\sum a}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$  rezolvă inegalitatea (1). Într-

adevăr, avem:

$$\begin{aligned} \sum a \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &= \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum \frac{1-a}{a^2} = \frac{1}{(abc)^2} \sum (1-a)b^2 c^2 = \frac{1}{(abc)^2} (\sum b^2 c^2 - \sum ab^2 c^2) = \\ &= \frac{1}{(abc)^2} (\sum b^2 c^2 - abc \sum bc) \geq \frac{1}{(abc)^2} \left( abc - abc \cdot \frac{1+9abc}{4} \right) = \frac{3}{4abc} - \frac{9}{4} \geq \frac{3 \cdot 27}{4} - \frac{9}{4} = 18 = \frac{18}{\sum a}. \end{aligned}$$

**Soluția 8.** Pentru a folosi notațiile obișnuite într-un triunghi (lungimile laturile notate  $a, b, c$  și semiperimetrul  $p$ ) vom schimba variabilele și vom scrie inegalitatea (1) în forma:

$$\sum \frac{y+z}{x^2} \geq \frac{18}{\sum x} \quad (2)$$

și folosind substituțiile **Ravi**  $x = p - a, y = p - b, z = p - c$  inegalitatea (2) se scrie

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq \frac{18}{p} \quad (3)$$

aceasta fiind echivalentă cu

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 \geq \frac{18\prod(p-a)^2}{p} \quad (4)$$

Prin calcul stabilim că

$$a(p-b)^2(p-c)^2 = p^4 a - 2p^3 a^2 + p^2(a^3 - 2abc) + 2pa^2 bc + ab^2 c^2 \text{ și analoagele ei.}$$

În continuare vom folosi identitățile geometrice  $\sum ab = p^2 + r^2 + 4Rr$ ,  $\prod a = 4pRr$ ,

$$\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr), \sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \text{ și } \prod (p-a) = pr^2. \text{ Avem}$$

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 = 2p^5 - 2p^3 \sum a^2 + p^2(\sum a^3 - 2\Pi a) + (\sum ab)(\Pi a),$$

iar după înlocuiri și efectuarea calculelor, obținem:

$$\sum a(p-b)^2(p-c)^2 = 16pR^2r^2 + 4pRr^3 - 2p^3r^2.$$

Atunci inegalitatea (4) se scrie

$$16pR^2r^2 + 4pRr^3 - 2p^3r^2 \geq \frac{18p^2r^4}{p} \Leftrightarrow p^2 \leq 8R^2 + 2Rr - 9r^2.$$

Folosind **Inegalitatea Gerretsen**  $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$  este suficient să demonstrăm că

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 8R^2 + 2Rr - 9r^2 \Leftrightarrow 2R^2 - Rr - 6r^2 \geq 0 \Leftrightarrow (R - 2r)(2R + 3r) \geq 0,$$

care este adevărată dacă ținem seama de **Inegalitatea Euler**  $R \geq 2r$ .

**Soluția 9.** Vom demonstra inegalitatea (3):

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq \frac{18}{p}.$$

Considerăm funcția  $f(t) = \frac{t}{(p-t)^2}$ ,  $t \in (0, p)$ . Prin calcul stabilim că

$f''(t) = \frac{2t+4p}{(p-t)^4} > 0, \forall t \in (0, p)$ . Aplicând **Inegalitatea Jensen** pentru funcția convexă

$f$ , obținem:

$$\sum \frac{a}{(p-a)^2} \geq 3 \cdot f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{2p}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\frac{2p}{3}}{\left(p - \frac{2p}{3}\right)^2} = \frac{18}{p}.$$

**Soluția 10.** Putem să presupunem că  $\sum a = 1$  fără a restrânge generalitatea. Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum \frac{1-a}{a^2}$$

și rămâne de arătat că  $\sum \frac{1-a}{a^2} \geq 18$ . Considerăm funcția  $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ ,  $x \in (0,1)$ . Prin

calcul stabilim că  $f''(x) = \frac{6-2x}{x^4} > 0, \forall x \in (0,1)$ . Aplicând **Inegalitatea Jensen** pentru

funcția convexă  $f$ , obținem:

$$\sum \frac{1-a}{a^2} = 3 \cdot f\left(\frac{\sum a}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 18.$$

**Soluția 11.** Vom folosi procedeul de reducere a numărului de variabile-**mixing variables**.

Să considerăm funcția  $f(a,b,c) = a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{18}{a+b+c}$ .

Vom arăta că  $f(a,b,c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ . Explicitând și apoi desfăcând parantezele, se

obține inegalitatea echivalentă:

$$b^5 + c^5 + 2b^4c + 2bc^4 + ab^4 + ac^4 + 2ab^3c + 2abc^3 \geq 6ab^2c^2 + 3b^3c^2 + 3b^2c^3. \quad (5)$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$b^5 + c^5 + b^4c \geq 3\sqrt[3]{b^5c^5b^4c} = 3b^3c^2$$

$$b^4c + bc^4 + bc^4 \geq 3\sqrt[3]{b^4cbc^4bc^4} = 3b^2c^3$$

$$ab^4 + ac^4 + ab^3c + ab^3c + abc^3 + abc^3 \geq 6\sqrt[6]{ab^4ac^4ab^3cab^3cab^3abc^3} = 6ab^2c^2$$

și sumând aceste inegalități, obținem (5). Prin urmare, rămâne să arătăm că  $f(a,t,t) \geq 0$ , unde

$t = \frac{b+c}{2}$ . Această relație este echivalentă cu

$$2 \cdot \frac{a^4 + 3a^3t - 7a^2t^2 + at^3 + 2t^4}{a^2t^2(a+2t)} \geq 0. \quad (6)$$

Folosind **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$a^4 + a^3t + a^3t + a^3t + t^4 + t^4 \geq 7\sqrt[7]{a^4a^3ta^3ta^3tat^3t^4t^4} = 7a^2t^2$$

și, prin urmare, inegalitatea (6) este adevărată.

**Soluția 12.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem  $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}$  și analogele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \sum \left(\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{a}\right) = 2\sum \frac{1}{a} \geq \frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**,  $(\sum a)\left(\sum \frac{1}{a}\right) \geq 9$ .

**Soluția 13.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem  $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$  și analogele ei.

Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \sum \left(\frac{a}{b^2} + \frac{a}{c^2}\right) \geq 2\sum \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2 \cdot \frac{9}{\sum \sqrt{ab}} \geq \frac{18}{\sum \frac{a+b}{2}} = \frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**,  $(\sum \sqrt{ab})\left(\sum \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \geq 9$  și **Inegalitatea MA-MG**,

$\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$  și analogele ei.

**Soluția 14.** Inegalitatea (1) se scrie echivalent

$$(\sum a)(\sum (a^3b^2 + a^2b^3)) \geq 18a^2b^2c^2$$

apoi desfășcând parantezele, se obține inegalitatea echivalentă

$$\sum a^4(b^2 + c^2) + 2\sum a^3b^3 + \sum a^3bc(b+c) \geq 18a^2b^2c^2.$$

Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$\begin{aligned} & \sum a^4b^2 + \sum a^4c^2 + \sum a^3b^3 + \sum a^3b^3 + \sum a^3b^2c + \sum a^3bc^2 \geq \\ & \geq 18\sqrt[18]{(\prod a^4b^2)(\prod a^4c^2)(\prod a^3b^3)(\prod a^3b^3)(\prod a^3b^2c)(\prod a^3bc^2)} = \\ & = 18\sqrt[18]{a^{36}b^{36}c^{36}} = 18a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

și soluția problemei se încheie.

**Soluția 15.** Cu substituțiile  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ , inegalitatea (1) se scrie

$$\sum \frac{y^2 + z^2}{x} \geq \frac{18}{\sum \frac{1}{x}}$$

Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\sum \frac{y^2 + z^2}{x} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} \geq \frac{(2\sum x)^2}{2\sum x} = 2\sum x \geq \frac{18}{\sum \frac{1}{x}},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MH**,  $(\sum x)\left(\sum \frac{1}{x}\right) \geq 9$ .

**Soluția 16.** Putem să presupunem că  $\prod a = 1$  fără a restrânge generalitatea. Avem:

$$\sum a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \sum \frac{b+c}{a^2} = \sum b^2 c^2 (b+c).$$

Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$\sum b^2 c^2 (b+c) \geq 3\sqrt[3]{\prod (b^2 c^2 (b+c))} \geq 3\sqrt[3]{\prod (2b^2 c^2 \sqrt{bc})} = 6(\prod a)^{\frac{5}{3}} = 6 \geq \frac{18}{\sum a},$$

unde am folosit **Inegalitatea MA-MG**,  $\sum a \geq 3\sqrt[3]{\prod a} = 3$  și  $b+c \geq 2\sqrt{bc}$  cu analogele ei.

**Soluția 17.** Vom folosi (fără demonstrație) următoarea:

**Lemă.** Fie  $a, b, c, x, y, z > 0$ . Atunci

$$\sum x(b+c) \geq 2\sqrt{(\sum xy)(\sum ab)}.$$

Pentru demonstrație și aplicații se poate consulta [3]. Folosind lema pentru:

$x = \frac{1}{a^2}, y = \frac{1}{b^2}, z = \frac{1}{c^2}$ , avem:

$$\sum \frac{b+c}{a^2} \geq 2\sqrt{\left(\sum \frac{1}{a^2 b^2}\right)(\sum ab)}.$$

Este suficient să arătăm că

$$2\sqrt{\left(\sum \frac{1}{a^2 b^2}\right)(\sum ab)} \geq \frac{18}{\sum a} \Leftrightarrow (\sum a)^2 \left(\sum \frac{1}{a^2 b^2}\right)(\sum ab) \geq 81$$

ultima inegalitate o deducem aplicând **Inegalitatea MA-MG** de trei ori. Mai exact, avem:

$(\sum a)^2 \geq (3\sqrt[3]{abc})^2$ ,  $\sum \frac{1}{a^2 b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4 b^4 c^4}}$ ,  $\sum ab \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$  și după înmulțirea acestor trei inegalități se obține concluzia dorită.

**O generalizare a problemei L222.**

Pentru  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numere reale pozitive,  $n$  număr natural,  $n \geq 3$ , demonstrați inegalitatea

$$a_1 \left( \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) + a_2 \left( \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} \right) + \dots + a_n \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \geq \frac{2n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (7)$$

**Prima soluție.** Cu substituțiile  $x_i = \frac{1}{a_i}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ , inegalitatea (7) se scrie

$$\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{x_2} + \dots + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_n} \geq \frac{2n^2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (8)$$

Aplicând **Inegalitatea Bergström**, obținem:

$$\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + \frac{x_4^2}{x_2} + \dots + \frac{x_1^2}{x_n} + \frac{x_2^2}{x_n} \geq \frac{(2(x_1 + x_2 + \dots + x_n))^2}{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

și folosind **Inegalitatea MA-MH**,  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$ , obținem

(8).

**A doua soluție.** Aplicând **Inegalitatea MA-MG**, obținem:

$$\begin{aligned} & a_1 \left( \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) + a_2 \left( \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} \right) + \dots + a_n \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \geq \\ & \geq n \sqrt[3]{a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \left( \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \dots \left( \frac{1}{a_{n-1}^2} + \frac{1}{a_n^2} \right)} \geq \\ & \geq n \sqrt[3]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \frac{2}{a_1 a_2} \cdot \frac{2}{a_2 a_3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{a_{n-1} a_n}} = \\ & = \frac{2n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \geq \frac{2n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \end{aligned}$$



unde am folosit **Inegalitatea MA-MG**,

$$\frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{a_{i+1}^2} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{a_i^2} \cdot \frac{1}{a_{i+1}^2}} = \frac{2}{a_i a_{i+1}}, \forall i = \overline{1, n}, a_{n+1} = a_1$$

$$\text{și } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

### **Bibliografie**

- [1] **Revista *Recreații Matematice*, nr. 1/2012.**
- [2] **Titu Zvonaru, *Câteva soluții la problema L222 din Recreații Matematice*, nr. 1/2012,**  
**Revista *Recreații Matematice*, nr. 2/2012.**
- [3] **Pham Huu Duc, *An unexpectedly useful inequality*, *Mathematical Reflections*, nr. 1/2008.**