Revista Electronică MateInfo.ro

(revistă de matematică lunară)

FEBRUARIE 2013

ISSN 2065 – 6432

MateInfo.ro

MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole: revistaelectronica@mateinfo.ro

dobre.andrei@yahoo.com

1. ÎNCĂ O SOLUȚIE PENTRU PROBLEMA OBJ. 15 DIN RMT NR. 3/2012

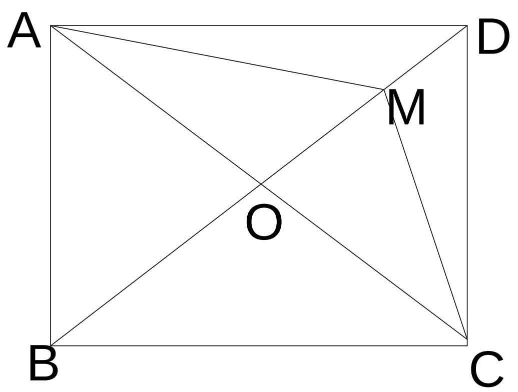
CONSTANTIN RUSU, Râmnicu Sărat

Problema OBJ. 15 din RMT nr. 3/2012 are următorul enunț:

''Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctul $M \in (BD)$. Demonstrați că $MB \cdot MD \le MA \cdot MC$ şi precizați când are loc egalitatea.''

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

În RMT, nr. 4/2012 sunt date la pag. 36 două soluții aparținând prima autorului iar cea de a doua d-lui *Dan Schwarz*. La paginile 12-13 mai sunt date încă trei soluții aparținând domnilor *Titu Zvonaru* şi *Neculai Stanciu*. În continuare vom da încă o soluție la această problemă.



În ΔAMC avem:

$$AM + MC \ge AC \qquad (1)$$

cu egalitate dacă $M = O$.

Cu teorema medianei obținem:

$$AM^2 + MC^2 = 2 \cdot MO^2 + \frac{AC^2}{2} \qquad (2)$$

De asemenea avem:

$$BM^2 + MD^2 = \left(\frac{AC}{2} + OM\right)^2 + \left(\frac{AC}{2} - OM\right)^2 = 2 \cdot OM^2 + \frac{AC^2}{2} \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) deducem că:

$$AM^2 + MC^2 = BM^2 + MD^2 \qquad (4)$$

Relația (1) se scrie echivalent astfel:

$$AM + MC \geq BM + MD$$

$$\Leftrightarrow AM^2 + MC^2 + 2 \cdot AM \cdot MC \geq BM^2 + MD^2 + 2 \cdot BM \cdot MD \qquad (5)$$

Din relațiile (4) şi (5) rezultă:

$$MB \cdot MD \leq MA \cdot MC\ ,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. SOME COLABORATION FOR THE CALCULATIONS OF SOME LIMITS

By D.M. Bătinețu – Giurgiu, ''Matei Basarab'' National College,

Bucharest, Romania

Ion Dina, ''Matei Basarab'' National College,

Bucharest, Romania

And

Neculai Stanciu, ''George Emil Palade'' School,

Buzău, Romania

Application 1.

If $B_n(t) = n^{1-t}\left(\frac{(n+1)^{2t}}{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t} - \frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\right)$, with $t > 0$, then evaluate $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(t)$.

Solution. We have

$$B_n(t) = n^{1-t}\cdot\frac{n^{2t}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^t}\cdot(u_n - 1) = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^t\cdot\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n, \forall n \geq 2, \qquad (1)$$

where we denoting

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2t}\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^t, \forall n \geq 2.$$

We have

$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ and then we obtain $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$.

We also have:

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(e_n^{2t} \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!} \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^t\right) = e^{2t} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\right)^t = e^{2t} \cdot e^{-t} = e^t .$$

By (1) and above we obtain that:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(t) = e^t \cdot 1 \cdot \ln e^t = te^t$$

Observation. For $t = 1$ we obtain that:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e ,$$

i.e. the limit of well-known ***D.M Bătinețu-Giurgiu'* s sequence.**

Application 2.

$\forall t \in R^*$ the sequence $(I_n(t))_{n\geq 2}$ given by

$$I_n(t) = n^{1-t}\left((n+1)^t\left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^t - n^t\left(\sqrt[n]{n}\right)^t\right),$$

is convergent.

Solution. We have that

$$I_n(t) = n \cdot \sqrt[n]{n^t} \cdot (u_n - 1) = \left(\sqrt[n]{n}\right)^t \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n, \forall n \geq 2 \qquad (1)$$

Where

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \cdot \left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^t, \forall n \geq 2.$$

We have

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \text{ and then } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1.$$

Also we have:

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} e_n^t \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^{nt} = e^t \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)^t = e^t \cdot 1 = e^t.$$

Taking to limit in (1) with $n \to \infty$ we obtain that:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t) = 1\cdot 1\cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} u_n^n\right) = \ln e^t = t.$$

Observation. For $t = 1$ yields that

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} I_n(1) = 1$$, i.e. the limit of the ***Romeo T. Ianculescu.***

Application 3.

Let $g_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}, \forall n \in N$ and $x \in R$. Compute:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sin^2 x}\left(g_{n+1}^{\cos^2 x} - g_n^{\cos^2 x}\right).$$

Soluion. We have:

$$G_n(x) = n^{1-\cos^2 x}\left(g_{n+1}^{\cos^2 x} - g_n^{\cos^2 x}\right) = n \cdot \left(\frac{g_n}{n}\right)^{\cos^2 x}\left(u_n - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{g_n}{n}\right)^{\cos^2 x}\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\ln u_n^n = \frac{(n+2)^{(n+1)\cos^2 x}}{n^{\cos^2 x}(n+1)^{n\cos^2 x}}\cdot\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\cdot \ln u_n^n =$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)\cos^2 x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\cos^2 x}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n, \forall n\in N^* \qquad (1)$$

where

$$u_n=\left(\frac{g_{n+1}}{g_n}\right)^{\cos^2 x}=\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{\cos^2 x}, \forall n\in N.$$

Therefore,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right)^{\cos^2 x}=\left(e\cdot\frac{1}{e}\right)^{\cos^2 x}=1, \text{ so } \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{n\cos^2 x}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)^{(n^2+n)\cos^2 x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2 x}=e^{-\cos^2 x}\cdot e^{2\cos^2 x}=e^{\cos^2 x}.$$

Taking the limit (1) with $n\to\infty$ we deduce that:

$$\lim_{n\to\infty}G_n(x)=e^{\cos^2 x}\cdot 1\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}u_n^n\right)=e^{\cos^2 x}\cdot\ln e^{\cos^2 x}=\cos^2 x\cdot e^{\cos^2 x}.$$

Observation. For $x=0$, we obtain that: $\lim_{n\to\infty}G_n(0)=\lim_{n\to\infty}G_n=e$, i.e. the limit of the ***Mihail Ghermănescu****'s* sequence.

Application 4.

Euler-Mascheroni-Lalescu collaboration

If $a,b\in R, a+b=1$, calculate:

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^a\sqrt[n+1]{\left((n+1)!c_n\right)^b}-n^a\sqrt[n]{(n!e_n)^b}\right),$$

Where

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ and } c_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Solution. We have:

$$B_n = (n+1)^a \sqrt[n+1]{((n+1)!c_n)^b} - n^a \sqrt[n]{(n!e_n)^b} = n^a \sqrt[n]{(n!e_n)^b}(u_n - 1) =$$

$$= n^a \sqrt[n]{(n!e_n)^b} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n = n \cdot \frac{\sqrt[n]{(n!e_n)^b}}{n^b} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!e_n}}{n}\right)^b \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n, \forall n \geq 2,$$

where

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}{\sqrt[n]{n!e_n}}\right)^b, \forall n \geq 2.$$

We have:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!c_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!c_n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!c_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!c_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e},$$

and analogous

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!e_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!e_n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!e_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!e_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e}.$$

So,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \text{ and the } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1.$$

Also we have that:

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} e_n^a \left(\frac{(n+1)!c_n}{n!e_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}\right)^b = e^a \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{e_n} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!c_n}}\right) =$$

$$= e^a \left(\frac{c}{e} \cdot e\right)^b = e^a c^b.$$

Hence,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \left(\frac{1}{e}\right)^b \cdot 1 \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} u_n^n\right) = \frac{1}{e^b} \cdot \ln\left(e^a c^b\right) = \frac{a + b\ln c}{e^b}.$$

Application 5.

Euler-Mascheroni-Bătinețu collaboration

Let $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ and $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, for any positive integer n.

Calculate:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\right).$$

Solution. We have

$$(1) \qquad x_n = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}} = \frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}\left(u_n - 1\right) =$$

$$= \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n, \forall n \geq 2,$$

where we denoted

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!c_n}}, \forall n \geq 2.$$

Also we have that:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!e_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!e_{n+1}}{(2n-1)!!e_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right) = \frac{2}{e},$$

and analogous,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{n+1}=\frac{2}{e}.$$

Yields,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=1,\text{ and }\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1.$$

We have

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(e_n^2\cdot\frac{(2n-1)!!e_n}{(2n+1)!!\gamma_n}\cdot\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}\right)=\frac{e^3}{\gamma}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{2n+1}=$$

$$=\frac{e^3}{\gamma}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!\gamma_n}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n+1}=\frac{e^3}{\gamma}\cdot\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{e^2}{\gamma}$$

Hence, taking to limt in (1) with $n\to\infty$ and considering (2) we obtain that

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{e}{2}\left(2-\ln\gamma\right).$$

3. Metode de rezolvare a ecuațiilor exponențiale şi logaritmice

Profesor Liliana Tomiță
C.N. ″A. T. Laurian″ Botoşani

1. Ecuații care se rezolvă utilizând monotonia funcțiilor

Teoremă: Fie funcțiile $f, g: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ interval.

Dacă funcțiile f şi g au monotonii diferite şi cel puțin una dintre ele este strict monotonă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție pe intervalul $\mathcal{I}$.

Demonstrație:

Considerăm $f: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ strict descrescătoare şi $g: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescătoare.

Presupunem prin reducere la absurd că ecuația $f(x) = g(x)$ are două soluții distincte $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$. Atunci $f(x_1) = g(x_1)$ şi $f(x_2) = g(x_2)$.

Fixăm $x_1 < x_2$. Cum f este strict descrescătoare avem $f(x_1) > f(x_2)$ şi g crescătoare avem $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Obținem astfel : $g(x_2) \geq g(x_1) = f(x_1) > f(x_2)$, deci $g(x_2) > f(x_2)$, contradicție cu $g(x_2) = f(x_2)$.

Prin urmare presupunerea făcută este falsă, deci ecuația $f(x) = g(x)$ poate avea cel mult o soluție pe $\mathcal{I}$.

Exemplu *Să se rezolve ecuația:*

$$7^{\lg x} + x^{\lg 24} = 25^{\lg x}$$

Avem condiția $x > 0$.

Ecuația dată este echivalentă cu $7^{\lg x} + 24^{\lg x} = 25^{\lg x}$, care devine $\left(\frac{7}{25}\right)^{\lg x} + \left(\frac{24}{25}\right)^{\lg x} = 1$

Considerăm funcția $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{7}{25}\right)^{\lg x} + \left(\frac{24}{25}\right)^{\lg x}$.

Ecuația obținută este $f(x) = 1$ şi cum f este strict descrescătoare ecuația poate admite maxim o soluție, $\lg x = 2$ deci $x = 100$.

Exerciții: Să se rezolve ecuațiile:

1. $2^{\frac{3x+7}{x+2}} + 5^{\frac{x+3}{x+2}} = 41$
2. $log_{14}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}) = log_{64}x$

2. Ecuații care se rezolvă utilizând inversabilitatea funcțiilor

Teoremă: Fie funcția $f: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ interval.

Dacă f este o funcție inversabilă şi strict crescătoare, atunci ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = x$

Demonstrație:

" $\Rightarrow$ " Fie $x_0 \in \mathcal{I}$ o soluție a ecuației $f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x_0) = f^{-1}(x_0)$

Presupunem prin reducere la absurd că $f(x_0) < x_0 \Rightarrow f^{-1}(x_0) < x_0$.

Cum f este strict crescătoare rezultă că $x_0 < f(x_0)$, deci contradicție.

Analog, pentru $f(x_0) > x_0$ rezultă contradicție.

Prin urmare, $f(x_0) = x_0$, deci x_0 este soluție pentru ecuația $f(x) = x$.

" $\Leftarrow$ " Fie $x_0 \in \mathcal{I}$ o soluție a ecuației $f(x) = x \Rightarrow f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0)$.

Obținem astfel $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$, deci x_0 este soluție pentru ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$.

<u>Exemplu:</u> *Să se rezolve ecuația:*

$$log_3(2^x + 1) = log_2(3^x - 1) \quad (1)$$

Avem condiția $3^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0$.

Considerăm funcția $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = log_2(3^x - 1)$ strict crescătoare.

Pentru $y \in \mathbb{R}, f(x) = y \Rightarrow log_2(3^x - 1) = y \Rightarrow 3^x = 2^y + 1 \Rightarrow x = log_3(2^y + 1)$.

Constatăm că funcția f este inversabilă şi

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), f^{-1}(x) = log_3(2^x + 1)$.

Ecuația (1) $\Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$, pentru $x > 0$, ecuație care are aceleaşi soluții cu ecuația $f(x) = x,\ x > 0$.

Obținem astfel ecuația $log_2(3^x - 1) = x \Rightarrow 3^x - 1 = 2^x \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ care are soluția unică $x = 1$ deoarece funcția $x \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x$ este strict crescătoare, iar funcția $x \longrightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ este strict descrescătoare.

Exerciții: Să se rezolve ecuațiile:

1) $4^x - 2^{x+1} + 1 = log_2(1 + \sqrt{x})$
2) $2^{\lg x} + 8 = (x - 8)^{\frac{1}{\lg 2}}$

<u>3. Ecuații care se rezolvă utilizând convexitatea – concavitatea funcțiilor</u>

<u>Teoremă:</u> Dacă funcția $f: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ este strict convexă pe intervalul $\mathcal{I}$, iar $g: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție concavă, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții pe intervalul $\mathcal{I}$.

Demonstrație:

Fie $f, g: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, f strict convexă şi g concavă pe $\mathcal{I}$.

Presupunem prin reducere la absurd că ecuația $f(x)=g(x)$ are trei soluții distincte $x_1<x_2<x_3$, $x_1,x_2,x_3\in\mathcal{I}\Rightarrow(\exists)t\in(0,1)\ a.\hat{\imath}.\ x_2=tx_1+(1-t)x_3$.

Cum f este strict convexă rezultă că $f(x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_3)$.

Dar x_1,x_2,x_3 sunt soluții ale ecuației $f(x)=g(x)$, rezultă că

$g(x_2)<tg(x_1)+(1-t)g(x_3)$ ceea ce contrazice g concavă, prin urmare presupunerea făcută este falsă.

Exemplu: Să se rezolve ecuația:

$$3^{x+2}=17+12x-2x^2$$

Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=3^{x+2}, g(x)=17+12x-2x^2$.

Deoarece f este strict convexă şi g este strict concavă rezultă că ecuația $f(x)=g(x)$ poate avea maxim două soluții.

Acestea sunt $x=-1$ şi $x=1$.

Exerciții: Să se rezolve ecuațiile:

1) $55(-5+6x)=1+2^x+3^x+\cdots+10^x$
2) $2\log_{\frac{1}{3}}x=-11+15x-4x^2$

4. Ecuații care se rezolvă cu Δ, folosind două variabile

Exemplu: Să se rezolve ecuația:

$$3^{2x+1}-x\cdot3^{x+1}-3^x=6x^2+7x+2\quad(1)$$

Ecuația (1) poate fi scrisă: $(3^x)^2\cdot3-x\cdot3^x\cdot3-3^x-(6x^2+7x+2)=0$.

Notăm $3^x=y, y>0$ şi obținem $3y^2-(3x+1)y-(6x^2+7x+2)=0$, ecuație de gradul doi în necunoscuta y.

$\Delta=(3x+1)^2+4\cdot3\cdot(6x^2+7x+2)$

$\Delta=(9x+5)^2$

$$y=\frac{3x+1+9x+5}{6}=2x+1$$

$$y=\frac{3x+1-9x-5}{6}=-\frac{3x+2}{3}$$

Obținem ecuațiile :

$3^x=2x+1$ cu soluțiile $x=0,\ x=1$, deoarece funcția $x\longrightarrow3^x$ este strict convexă iar funcția $x\to2x+1$ este liniară.

$3^x=-\frac{3x+2}{3}$ cu soluția $x=-1$, deoarece funcția $x\longrightarrow3^x$ este strict crescătoare iar funcția $x\to-\frac{3x+2}{3}$ este strict descrescătoare.

Deci $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Exerciții: Să se rezolve ecuațiile:

1) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$
2) $3^{x-2} \cdot (3^x + 1) = 5 \cdot 6^{x-2} + 2^{x-2}(2^x + 1)$

5. Ecuații care se rezolvă utilizând inegalități

Exemple: Să se rezolve ecuațiile:

a) $2012^{x^2-3x+2} + 2012^{x^2+x-2} = \frac{2}{\sqrt[4]{2012}}$

$2012^{x^2-3x+2} + 2012^{x^2+x-2} \geq 2\sqrt{2012^{2x^2-2x}} = 2 \cdot 2012^{x^2-x}$

Avem $x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ de unde rezultă că

$\frac{2}{\sqrt[4]{2012}} \geq 2 \cdot 2012^{x^2-x} \geq 2 \cdot 2012^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2012}} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x = 1.$

b) $4^{x-1} + 4^{-x+1} = 1 - x^2 + 2x$

Avem inegalitatea $4^{x-1} + 4^{-x+1} = 4^{x-1} + \frac{1}{4^{x-1}} \geq 2$ şi $1 - x^2 + 2x = 2 - (x-1)^2 \leq 2$

Egalitatea are loc pentru $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

c) $49^x + 25^x + 1 = 35^x + 7^x + 5^x$

Ecuația este echivalentă cu $(7^x)^2 + (5^x)^2 + 1 = 7^x \cdot 5^x + 7^x + 5^x$, deci $7^x = 5^x = 1$, adică $x = 0$.

Exerciții: Să se rezolve ecuațiile:

1) $|\cos x - \sin x| = \sqrt{2^{\frac{\pi}{4}+x} + 2^{-\frac{\pi}{4}-x}}$
2) $(10^{x\lg 6} + 10^{x\lg 35} + 10^{x\lg 11})^2 = (4^x + 25^x + 121^x)(9^x + 49^x + 1)$

Bibliografie:

[1] Colecția Gazeta Matematică, seria B;

[2] Gheorghe Andrei, ″Exponențiale şi logaritmi″, Editura Gil, 2006

4. Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice fundamentale

Prof. LUNG IOAN, gradul I
C.N." ARANY JANOS" SALONTA

Datorită faptului că funcțiile trigonometrice sin, cos, tg şi ctg sunt funcții periodice care admit perioadă principală, este nevoie să studiem ecuațiile trigonometrice fundamentale pe un interval de lungime egală cu perioada principală, numit interval de studiu. În acest material prezint rezolvarea acestor ecuații trigonometrice fundamentale prin ***stabilirea clară aintervalului de studiu***. Mai folosesc şi monotonia funcțiilor trigonometrice pe intervalul de studiu.

Introducere

Definiție: O ecuație care conține necunoscuta la argumentul unor funcții trigonometrice se numesc ecuații trigonometrice.

Definiție: Fie ecuația trigonometrică $f(x)=0,\ x\in D$ (1). Un număr $\alpha\in D$ este soluție a ecuației (1) dacă $f(\alpha)=0$.

Definiție: A rezolva o ecuație trigonometrică înseamnă a-i determina soluțiile.

Definiție: Ecuațiile de forma $\sin x=a, \cos x=b, tgx=c, ctgx=d; a,b,c,d\in R$ se numesc ecuații trigonometrice fundamentale.

Rezolvarea ecuației trigonometrice se va reduce, prin diverse transformări, la rezolvarea ecuațiilor trigonometrice fundamentale.

Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice fundamentale

I) Ecuația $\sin x=a$, $a\in R$.

1) $a\notin[-1,1]$

Deoarece $\sin x\in[-1,1],\ \forall x\in R\Rightarrow$ ecuația nu are soluții.

Deci: $S=\varnothing$ (S – mulțimea soluțiilor ecuației)

2) $a\in[-1,1]$

Studiem ecuația pe intervalul de studiu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, interval de lungime egală cu 2π, perioada principală a funcției sin. Funcția sin este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	$-1 \nearrow \nearrow$ 1 $\searrow \searrow -1$

i) $a=1$

Ecuația $\sin x=1$ are pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ numai soluția $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Ținând seama că 2π este perioada principală a funcției sin $\Rightarrow S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \middle| k\in Z\right\}$ este mulțimea soluțiilor ecuației.

ii) $a=-1$

$\Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{2}$ este singura soluție a ecuației $\sin x=-1$ pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow$ $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \middle| k\in Z\right\}$ este mulțimea soluțiilor ecuației.

iii) $a\in(-1,1)$

Deoarece $\arcsin a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \pi-\arcsin a\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\sin(\arcsin a)=a$, $\sin(\pi-\arcsin a)=\sin(\arcsin a)=a \Rightarrow \alpha_1=\arcsin a$ şi $\alpha_2=\pi-\arcsin a$ sunt singurele soluții ale ecuației $\sin x=a$ pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$

$S=\{\arcsin a+2k\pi | k\in Z\}\cup\{\pi-\arcsin a+2k\pi | k\in Z\}=\left\{(-1)^l \arcsin a+l\pi \middle| l\in Z\right\}$

este mulțimea soluțiilor ecuației.

II) Ecuația $\cos x=b$, $b\in R$.

1) $b\notin[-1,1]$

$\cos x\in[-1,1], \forall x\in R \Rightarrow S=\varnothing$

2) $b\in[-1,1]$

Studiem ecuația pe intervalul de studiu $[0,2\pi)$, interval de lungime egală cu 2π, perioada principală a funcției cos. Funcția cos este strict descrescătoare pe $[0,\pi]$ şi strict crescătoare pe $[\pi,2\pi)$.

x	0 π 2π
$\cos x$	1 $\searrow \searrow -1 \nearrow \nearrow 1$

i) $b=1$

Ecuația $\cos x = 1$ are pe $[0, 2\pi)$ numai soluția $\alpha = 0$. Funcția cos este periodică de perioadă principală egală cu $2\pi \Rightarrow$
$S = \{2k\pi \mid k \in Z\}$ este soluția ecuației.

ii) $b = -1$

$\Rightarrow \alpha = \pi$ este singura soluție a ecuației $\cos x = -1$ pe $[0, 2\pi) \Rightarrow$

$S = \{\pi + 2k\pi \mid k \in Z\} = \{(2k+1)\pi \mid k \in Z\}$ - soluția ecuației.

iii) $b \in (-1, 1)$

$\arccos b \in (0, \pi), 2\pi - \arccos b \in (\pi, 2\pi)$ și

$\cos(\arccos b) = b, \cos(2\pi - \arccos b) = \cos(\arccos b) = b \Rightarrow$

$\alpha_1 = \arccos b$ și $\alpha_2 = 2\pi - \arccos b$ sunt singurele soluții ale ecuației $\cos x = b$ pe intervalul $[0, 2\pi)$. $\Rightarrow$

$S = \{\arccos b + 2k\pi \mid k \in Z\} \cup \{2\pi - arccob + 2k\pi \mid k \in Z\} = \{\pm \arccos b + 2l\pi \mid l \in Z\}$

- este mulțimea soluțiilor ecuației.

III) Ecuația $tgx = c,\ c \in R$.

Deoarece funcția tg este periodică de perioadă principală egală cu π studiem ecuația pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ care are lungimea egală cu π. Pe acest interval funcția tg este strict crescătoare.

x	$-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}$
tgx	$\vert_{-\infty} \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow {}^{+\infty}\vert$

$\Rightarrow \alpha = arctgc$ este singura soluție a ecuației pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow S = \{\mathrm{arc}\,tgc + k\pi \mid k \in Z\}$ este soluția ecuației pe R.

IV) Ecuația $ctgx = d$, $d \in R$.

Deoarece $ctg(t) = tg\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ rezolvarea ecuației $ctgx = d$ se reduce la rezolvarea ecuației $tgx = c$.