

*Revista Electronică MateInfo.ro**(revistă de matematică lunară)**MARTIE 2013**ISSN 2065 – 6432*www.mateinfo.roARTICOLE :

1.	Other solutions for two problems of REOIM and La Gaceta de la RSME	2
2.	Asupra unei probleme de matematica data la concursul interjudetean “Trident-Petru Morosan” 2009 Braila	5
3.	<u>Formula lui Cardan pentru rezolvarea ecuației de gradul 3</u>	9
4.	Rezolvarea CONJECTURII lui D.H.LEHMER referitoare la ECUATIA k $\phi[N] \equiv N - 1$	14
5.	Aplicații ale teoremei lui Lagrange în demonstrarea unor relații trigonometrice	24

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
 E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro
dobre.andrei@yahoo.com

1. Other solutions for two problems of REOIM and La Gaceta de la RSME

by Titu Zvonaru, Comănești and Neculai Stanciu, Buzău

Problema 229 from REOIM, No. 47, Noviembre 2012 – Febrero 2013

Problema 229 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Sea ABC un triángulo y AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas concurrentes en un punto O interior al triángulo.

Sean

$$\begin{aligned}\alpha &= [AOC_1] - [COA_1], \\ \beta &= [BOA_1] - [AOB_1], \\ \gamma &= [COB_1] - [BOC_1].\end{aligned}$$

Probar que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $\alpha\beta\gamma = 0$.

Nota: $[PQR]$ es el área del triángulo PQR .

Our Solution:

We denote:

$$[AOC_1] = S_1, [COA_1] = S_2, [BOA_1] = S_3, [AOB_1] = S_4, [COB_1] = S_5, [BOC_1] = S_6,$$

and then:

$$\alpha = S_1 - S_2, \beta = S_3 - S_4, \gamma = S_5 - S_6.$$

Also we denote:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = x, \frac{CB_1}{B_1A} = y, \frac{AC_1}{C_1B} = z,$$

and then by the theorem of Ceva we deduce that:

$$xyz = 1.$$

Because the triangles AOC_1 and BOC_1 has the same high and $\frac{AC_1}{C_1B} = z$, we obtain that

$$S_1 = zS_6, \text{ and similar } S_3 = xS_2, S_5 = yS_4.$$

From the same reason we have $[ABA_1] = x \cdot [AA_1C]$, which is write:

$$S_1 + S_6 + S_3 = xS_4 + xS_5 + xS_2 \Leftrightarrow zS_6 + S_6 = xS_4 + xyS_4, \text{ i.e.}$$

$$S_4 = \frac{z+1}{x(y+1)} S_6 \quad (1)$$

Analogous we obtain that:

$$[BCB_1] = y \cdot [BAB_1] \Leftrightarrow S_3 + S_2 + S_5 = yS_1 + yS_6 + yS_4 \Leftrightarrow xS_2 + S_2 = yzS_6 + yS_6,$$

i.e.

$$S_2 = \frac{y(z+1)}{x+1} S_6 \quad (2)$$

If $\alpha + \beta + \gamma = 0$, then by (1) and (2) we obtain successively that:

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 + S_5 &= S_2 + S_4 + S_6 \Leftrightarrow zS_6 + xS_2 + yS_4 = S_2 + S_4 + S_6 \\ \Leftrightarrow (z-1)S_6 + (x-1)S_2 + (y-1)S_4 &= 0 \\ \Leftrightarrow z-1 + \frac{(x-1)y(z+1)}{x+1} + \frac{(y-1)(z+1)}{x(y+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow x + x^2z + 1 + xz - x^2y - x^2 - xy - x + xy + x^2y^2 + x + x^2y - y - xy^2 - 1 - xy + 1 + \\ &+ xy + yz + y - xz - x - z - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2z - x^2 + x^2y^2 - xy^2 + yz - z &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2z - x^2 + x^2y^2 - 1 + 1 - z + yz - xy^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(z-1) + \frac{1-z^2}{z^2} + 1 - z + y \cdot \frac{z^2-1}{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1) \left(x^2 - \frac{1+z}{z^2} - 1 + y \cdot \frac{z+1}{z} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(x^2 - x^2y^2 - xy - 1 + y + xy^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)[x^2 - 1 - y(x-1) - xy^2(x-1)] &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(z-1)(x+1-y-xy^2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1)(xy+x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Therefore, if $\alpha + \beta + \gamma = 0$, then at least one of numbers x, y, z are equal with 1. We assume that $x = 1$. Then by (1) we obtain that:

$$S_5 = yS_4 = y \cdot \frac{z+1}{x(y+1)} \cdot S_6 = \frac{yz+y}{y+1} \cdot S_6 = \frac{1+y}{y+1} \cdot S_6 = S_6,$$

where we use the fact that: $x = 1 \Rightarrow yz = 1$.

Hence,

$$\gamma = 0 \text{ and } \alpha\beta\gamma = 0,$$

and the proof is complete.

Problema 197, Vol. 16 (2013), No. 1, pp. 107-116

PROBLEMA 197. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demostrar que

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{c}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{a}{\sqrt{c^2+3}} \leq \sqrt[4]{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}.$$

Our Solution:

By *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*'s inequality we have:

$$\left(b \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+3}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+3}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \right)^2 \leq$$

$$\leq (b^2 + c^2 + a^2) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \right)^2 \right]$$

and then is sufficient to show that:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3} \right) \leq \sqrt{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3} \leq \frac{a+b+c}{4\sqrt{abc}}.$$

Since:

$$a^2 + 3 = a^2 + 1 + 1 + 1 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4\sqrt{a},$$

it remains to show that:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{abc}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \right] \geq 0, \text{ which is true.}$$

We have equality if and only if $a = b = c = 1$, and we are done.

2. Asupra unei probleme de matematica data la concursul interjudetean “Trident-Petru Morosan” 2009 Braila

Profesor Serban George-Florin
Liceul Tehnologic “ Grigore Moisil “ Braila

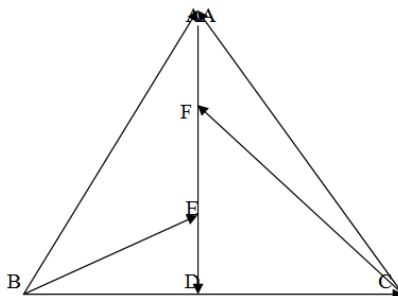
La clasa a 7-a a fost propusa urmatoarea problema de geometrie:

“Fie triunghiul ABC ascutitunghic si $D \in BC$ piciorul inaltimii din A. Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ si $\angle ACB$ intersecteaza AD in E respectiv F, astfel incat $BE=CF$. Aratati ca triunghiul ABC este isoscel”.

Voi prezenta in continuare 3 metode de rezolvare a acestei probleme.

Metoda 1

In $\triangle ABD$ si $\triangle ADC$ aplic formula bisectoarei.



$$BE = \frac{2AB \cdot BD \cdot \cos \frac{B}{2}}{AB + BD} \quad \text{si} \quad CF = \frac{2AC \cdot DC \cdot \cos \frac{C}{2}}{AC + DC} \quad \text{dar } BE = CF.$$

$\triangle ABD$, $BD = AB \cos B$, $\triangle ADC$, $DC = AC \cos C$. Din T sinusurilor avem $AB = 2R \sin C$, $AC = 2R \sin B$. Inlocuiesc BD , DC , AB si AC in formulele lui BE si CF .

$$BE = \frac{2 \cdot 2R \cdot \sin C \cdot AB \cdot \cos B \cdot \cos \frac{B}{2}}{AB(1 + \cos B)} = \frac{4R \sin C \cos B \cos \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{2R \sin C \cos B}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$CF = \frac{2 \cdot 2R \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \cos \frac{C}{2}}{AC(1 + \cos C)} = \frac{4R \sin B \cos C \cos \frac{C}{2}}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2R \sin B \cos C}{\cos \frac{C}{2}}. \text{ Dar } BE = CF$$

$$\frac{2R \sin C \cos B}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{2R \sin B \cos C}{\cos \frac{C}{2}} \text{ deci } \operatorname{tg} B \cos \frac{B}{2} = \operatorname{tg} C \cos \frac{C}{2}.$$

Fie functia $F: (0, \Pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(X) = \operatorname{tg} X \cos \frac{X}{2}$. Derivata lui F este

$$F'(X) = \frac{2 \cos \frac{X}{2} - \sin X \cos X \sin \frac{X}{2}}{2 \cos X \cos X} > 0, \text{ numitorul este mai mare ca } 0, \text{ iar } 2 \cos \frac{X}{2} -$$

$\sin X \cos X \sin \frac{X}{2} > 0$ implica $\sin X \cos X \operatorname{tg} \frac{X}{2} < 2$ deoarece $X \in (0, \Pi/2)$, $X/2 \in (0, \Pi/4)$,

$0 < \operatorname{tg} \frac{X}{2} < 1$ deci $\sin X \cos X \operatorname{tg} \frac{X}{2} < 1 < 2$. Deci functia F este strict crescatoare pe $(0, \Pi/2)$

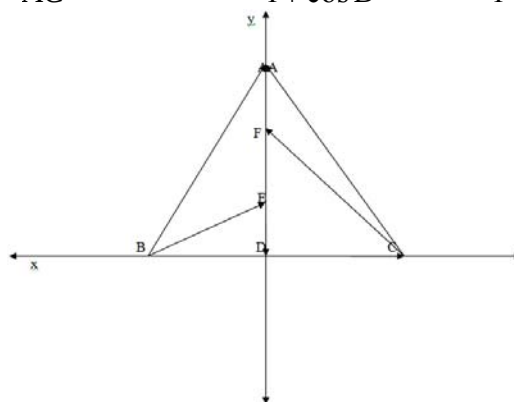
deci este injectiva $F(\angle B) = F(\angle C)$ rezulta ca $m(\angle B) = m(\angle C)$ deci $AB = AC$.

Metoda 2.

In reperul cartezian xoy Fie punctele $A(0, a)$, $D(0, 0)$, $B(b, 0)$ si $C(c, 0)$.

In $\triangle ABD$ si $\triangle ADC$ aplic teorema bisectoarei.

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BD}{AB} = \cos B \text{ si } \frac{DF}{AF} = \frac{CD}{AC} = \cos C, E(0, \frac{a \cos B}{1 + \cos B}), F(0, \frac{a \cos C}{1 + \cos C})$$



$$BE^2 = b^2 + \frac{a^2 \cos B \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)}, CF^2 = c^2 + \frac{a^2 \cos C \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)} \text{ dar } BE = CF$$

$$b^2 + \frac{a^2 \cos B \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = c^2 + \frac{a^2 \cos C \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)} \text{ Impart prin } a^2.$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{\cos B \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{\cos C \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

$$\operatorname{ctg}^2 B + \frac{\cos B \cdot \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = \operatorname{ctg}^2 C + \frac{\cos C \cdot \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

$$\cos^2 B \left(\frac{1}{\sin B \sin B} + \frac{1}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} \right) = \cos^2 C \left(\frac{1}{\sin C \sin C} + \frac{1}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)} \right)$$

$$\frac{2 \cos B \cos B (1 + \cos B)}{\sin B \sin B (1 + \cos B)(1 + \cos B)} = \frac{2 \cos C \cos C (1 + \cos C)}{\sin C \sin C (1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

Rezulta ca $\frac{\cos B \cos B}{\sin B \sin B (1 + \cos B)} = \frac{\cos C \cos C}{\sin C \sin C (1 + \cos C)}$

Fie functia $F: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{X * X}{(1 - X * X)(1 + X)}$. Derivata functiei F este

$$F'(X) = \frac{X(1+X)(X * X - X + 2)}{(1 - X * X)(1 - X * X)(1 + X)(1 + X)} > 0 \text{ pe } (0,1). \text{ Rezulta ca } F \text{ este strict crescatoare pe}$$

$(0,1)$ deci F este injective $F(\cos B) = F(\cos C)$, B si C sunt unghiuri ascutite rezulta ca $m(\angle B) = m(\angle C)$ deci $AB = AC$ avem ca $\triangle ABC$ este isoscel.

Metoda 3.

In $\triangle ABD$ si $\triangle ADC$ aplic teorema bisectoarei.

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BD}{AB} = \cos B \quad \text{si} \quad \frac{DF}{AF} = \frac{CD}{AC} = \cos C$$

In $\triangle ABD$, $\frac{\overrightarrow{BD} + (\cos B) \overrightarrow{BA}}{1 + \cos B} = \overrightarrow{BE}$

In $\triangle ACD$, $\frac{\overrightarrow{CD} + (\cos C) \overrightarrow{CA}}{1 + \cos C} = \overrightarrow{CF}$

Dar $|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{CF}|$ Deci $|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{CF}|^2$

Dar $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$ si $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

Deci $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BD} + (\cos B) \overrightarrow{BD} + (\cos B) \overrightarrow{DA}}{1 + \cos B}$

Analog se obtine

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CD} + (\cos C) \overrightarrow{CD} + (\cos C) \overrightarrow{DA}}{1 + \cos C}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \frac{(\cos C) \overrightarrow{DA}}{1 + \cos C}$$

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B) \overrightarrow{DA} \overrightarrow{DA}}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} + \frac{2(\cos(B)) \overrightarrow{BD} \overrightarrow{DA}}{1 + \cos B}$$

Dar $AD \perp BC$ deci $\overrightarrow{BD} * \overrightarrow{AD} = 0$

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B) \overrightarrow{DA} \overrightarrow{DA}}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} . \text{ Analog se obtine}$$

$$|\overrightarrow{CF}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 + \frac{(\cos C)(\cos C) \overrightarrow{DA} \overrightarrow{DA}}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)} .$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{(\cos B)(\cos B) \overrightarrow{DA} \overrightarrow{DA}}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = |\overrightarrow{CD}|^2 + \frac{(\cos C)(\cos C) \overrightarrow{DA} \overrightarrow{DA}}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

impart prin

$$|\overrightarrow{DA}|^2 \text{ si obtinem } \frac{BD * BD}{DA * DA} + \frac{\cos B * \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = \frac{CD * CD}{DA * DA} + \frac{\cos C * \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

$$\text{ctg}^2 B + \frac{\cos B * \cos B}{(1 + \cos B)(1 + \cos B)} = \text{ctg}^2 C + \frac{\cos C * \cos C}{(1 + \cos C)(1 + \cos C)}$$

am obtinut aceiasi formula ca si in metoda 2 .(continuarea este in metoda 2).

Comentariu:

$\triangle ABC$ fiind isoscel avem ca AD inaltime rezulta ca AD este bisectoare . Folosim faptul ca intr-un triunghi bisectoarele sun concurente . Avem ca $AD \cap BE \cap CF = \{I\}$,

I este centrul cercului inscris (punctul de intersectie al bisectoarelor $\triangle ABC$).

Rezulta ca $I=E=F$, deci punctele E si F coincid. Desi din enuntul problemei “. Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ si $\angle ACB$ intersecteaza AD in E respectiv F ” se intelege ca punctele E si F sunt distincte.

Bibliografie: Subiect dat la concursul interjudetean
“Trident-Petru Morosan” 2009 Braila

3. Formula lui Cardan pentru rezolvarea ecuației de gradul 3

Profesor Rezmive Daniela Florina, gradul didactic 2
Liceul Tehnologic „Aurel Vlaicu”, Lugoj, jud. Timiș

Fie ecuația

$$x^3 + px + q = 0, \text{ ecuația de gradul 3 cu } p, q \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\text{Notăm } x = u + v \Rightarrow x^3 = (u + v)^3 \Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \Rightarrow x^3 - u^3 - v^3 - \underbrace{3uv(u + v)}_x = 0$$

Avem că

$$x^3 - 3uvx - u^3 - v^3 = 0 \quad (2)$$

Pentru $-3uv = p$ și $u^3 + v^3 = -q$, ecuația (2) este echivalentă cu ecuația (1).

$$\text{Pornind de la sistemul } \begin{cases} -3uv = p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad \text{obținem că } \begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}.$$

Notând $u^3 = X_1$, $v^3 = X_2$ și folosind relațiile lui Viète obținem că X_1, X_2 sunt soluțiile ecuației

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (3)$$

Calculând $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$, ecuația (3) are soluțiile

$$X_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$X_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Din $u^3 = X_1$, rezultă că

$$\begin{aligned}
u^3 &= X_1 \Rightarrow u^3 = X_1(\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow \\
u_1 &= \sqrt[3]{X_1}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[3]{X_1} \\
u_2 &= \sqrt[3]{X_1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{X_1} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
u_3 &= \sqrt[3]{X_1} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{X_1} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Analog din $v^3 = X_2$, rezultă că

$$\begin{aligned}
v^3 &= X_2(\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow \\
v_1 &= \sqrt[3]{X_2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[3]{X_2} \\
v_2 &= \sqrt[3]{X_2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{X_2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
v_3 &= \sqrt[3]{X_2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{X_2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Tinând cont că rădăcinile ecuației (1) sunt de forma $x = u + v$, putem scrie soluțiile

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
x_2 &= \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
x_3 &= \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$

Se întâlnesc următoarele situații:

- Dacă $\Delta > 0$ atunci $\sqrt[3]{X_1}, \sqrt[3]{X_2} \in \mathbb{R}$, deci $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și $x_1 = \overline{x_2}$
- Dacă $\Delta = 0$ atunci $\sqrt[3]{X_1} = \sqrt[3]{X_2}$, deci $x_1 \in \mathbb{R}$, iar $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{X_1}$
- Dacă $\Delta < 0$ atunci $X_1, X_2 \in \mathbb{C}$ și $X_1 = \overline{X_2}$.

Fie $X_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi) \Rightarrow X_2 = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) - i \sin(-\varphi)) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{X_1} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \quad \sqrt[3]{X_2} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \left(-\frac{\varphi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{3} \right) \right)$$

Cum $\sqrt[3]{X_1} \cdot \sqrt[3]{X_2} = \sqrt[3]{r^2} = -\frac{p}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ ($p < 0$).

Obținem astfel

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2} = \\ &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right) + \sqrt[3]{r} \left(\cos \left(-\frac{\varphi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{3} \right) \right) = \\ &= \sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{r} i \sin \frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{r} \cos \left(-\frac{\varphi}{3} \right) + \sqrt[3]{r} i \sin \left(-\frac{\varphi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{r} i \sin \frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt[3]{r} i \sin \frac{\varphi}{3} = \\ &= 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{X_1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt[3]{X_2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{X_1} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) + \sqrt[3]{X_2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}$$

Și cele 3 soluții sunt reale.

Expresiile rădăcinilor x_1, x_2, x_3 pot fi exprimate printr-o singură formulă numită formula lui Cardan

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Example:

Exemplul 1) $x^3 - 51x - 104 = 0$.

Avem că $p = -51, q = -104$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$X^2 - 104X + 17^3 = 0$$

$$\Delta = 104^2 - 4 \cdot 17^3 = -4 \cdot 2209 = -4 \cdot 47^2 < 0$$

$$\text{Soluțiile ecuației (3) vor fi } X_{1,2} = \frac{104 \pm 2 \cdot 47i}{2} = 52 \pm 47i = (4 \pm i)^3.$$

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației inițiale vor fi $x = \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2}$

$$x_1 = (4+i) + (4-i) = 8$$

$$x_2 = (4+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + (4-i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -4 - \sqrt{3}$$

$$x_3 = (4+i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + (4-i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -4 + \sqrt{3}$$

Exemplul 2: $x^3 - 21x - 20 = 0$

Avem că $p = -21, q = -20$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$X^2 - 20X + 343 = 0$$

$$\Delta = -4 \cdot 3^5 < 0$$

Soluțiile ecuației (3) vor fi $X_{1,2} = \frac{20 \pm 2 \cdot 9\sqrt{3}i}{2} = 10 \pm 9\sqrt{3}i$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației inițiale vor fi $x = \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2}$

$$x_1 = \sqrt[3]{10 + 9i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 9i\sqrt{3}}$$

Scriem forma trigonometrică pentru $X_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$10 + 9i\sqrt{3} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ în care:}$$

$$r = |x_1| = \sqrt{343} = 7\sqrt{7}, \cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{343}} = \frac{10}{7\sqrt{7}}, \sin\varphi = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{343}} = \frac{9\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Așadar: } u = \sqrt[3]{10 + 9i\sqrt{3}} = \sqrt[6]{7^3} \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) = \sqrt{7} \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) \text{ și}$$

$$v = \sqrt[3]{10 - 9i\sqrt{3}} = \sqrt[6]{7^3} \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) = \sqrt{7} \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$$

Soluțiile ecuației date vor fi: $x_1 = 2\sqrt{7} \cos\frac{\varphi}{3}, x_2 = 2\sqrt{7} \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}, x_3 = 2\sqrt{7} \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}$.

Reducerea unei ecuații de gradul 3 la ecuația de tipul (3) Fie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Reducem termenul de grad doi prin schimbarea de variabilă $x \rightarrow y - \frac{b}{3a}$, ecuația aducându-se la forma

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Exemplul 3: $x^3 + 9x^2 + 42x + 196 = 0$.

Facem schimbarea de variabilă $x \rightarrow y - 3$ și obținem ecuația $y^3 + 15y + 124 = 0$ (*)

Avem $p = 15$, $q = 124$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$Y^2 + 124Y - 125 = 0$$

$$\Delta = 126^2 > 0$$

Soluțiile ecuației (3) vor fi $Y_1 = 1$, $Y_2 = -125$.

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației (*) vor fi $y = \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}$

Deci

$$y_1 = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-125} = 1 - 5 = -4$$

$$y_2 = 1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) - 5 \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 3i\sqrt{3}$$

$$y_2 = -5 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 3i\sqrt{3}$$

Ținând cont de substituția făcută $x \rightarrow y - 3$, obținem soluțiile ecuației inițiale:

$$x_1 = -7, \quad x_2 = -1 + 3i\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - 3i\sqrt{3}.$$

Exemplul 4: $x^3 - x^2 + 1 = 0$

Facem schimbarea de variabilă $x \rightarrow y + \frac{1}{3}$ și obținem ecuația $y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{25}{27} = 0$.

Avem $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{25}{27}$, folosind notațiile de mai sus ajungem la forma ecuației (3)

$$Y^2 + \frac{25}{27}Y + \frac{1}{27^2} = 0.$$

$$\Delta = \frac{69}{81} > 0. \quad \text{Deci } Y_{1,2} = \frac{-25 \pm 3\sqrt{69}}{54} = -\frac{25}{54} \pm \frac{\sqrt{69}}{18}.$$

Din formula lui Cardan soluțiile ecuației (*) vor fi $y = \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}$.

Rezultă $u = \sqrt[3]{-\frac{25}{54} + \frac{\sqrt{69}}{18}}$, $v = \sqrt[3]{-\frac{25}{54} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$.

Soluțiile ecuației în necunoscuta y sunt

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{25}{54} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{-\frac{25}{54} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{25}{54} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{25}{54} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

$$y_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{25}{54} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{25}{54} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

Din $x \rightarrow y - 3$, obținem soluțiile ecuației inițiale.

Bibliografie:

ROȘCULEȚ, M. --Analiză matematică, vol I, Editura Didactică și Pedagogică, București 1964

4.Rezolvarea CONJECTURII lui D.H.LEHMER referitoare la ECUATIA $k\phi[N] == N - 1$

de NICODIM A. NEGREA
Liceul Teoretic Traian DEVA

*Mamei mele , **Elisabeta***

Reproducem urmatorul articol de pe INTERNET :

“ *Wolfram Library Archive*

MATHSOURCE

Title

Computational Evidence for Lehmer's Totient Conjecture

Author

John Renze

Organization : *Wolfram Research , Inc.*

Department : *Information Resources*

Revision date

2004 – 11 – 23

Description

In 1932 , D.H.Lehmer considered the equation

$k[N] == N - 1$, for positive integers **N** and **k** .

If **N** is **prime** , then the equation has a solution with **$k = 1$** .

He conjectured that these are the only solutions .

Conjecture : **Let a be a positive integer .**

Then $[N]$ divides $N - 1$ if and only if N is prime .

The conjecture remains open to this day .

The current best result , due to Cohen and Hagis , is that **N** must have at least 14 prime factors and be greater than 10^{22} .

The code in this notebook carries out a search for a counter-example to Lehmer's conjecture and extends these limits .

Subject

 Mathematics > Number Theory

Downloads

Lehmer Article . nb (12,1 kB) —

Mathematica Notebook [for Mathematica 5.0]

([4])

Au fost multe incercari de rezolvare ! (de exemplu : in [4] si [2]) .

“Solutionarea” mea publicata in [3] nu a fost unanim acceptata .
Incercam aici ,din nou, rezolvarea Conjecturii , inspirati de [3] .

* * *

In prima parte aflam multimea solutiilor unei ecuatii in numere intregi , care va fi esentiala in partea a doua pentru rezolvarea Conjecturii .

Notam pentru un numar intreg fix oarecare t , $t \geq 2$:

$$(1) \quad L_t = \{ (n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) : n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t \text{ sunt numere intregi} \}$$

$$1 \leq n_0, \quad 2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{t-1} \leq z_t, \\ n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1)(z_t-1) = n_1n_2\dots n_{t-1}z_t - 1 \quad \}$$

Pentru $t = 2$ si $(n_0, n_1, z_2) \in L_2$ obtinem :

$$n_0(n_1-1)(z_2-1) = n_1z_2 - 1 \\ n_0(n_1-1)(z_2-1) - n_1(z_2-1) + n_1 - 1, \text{ unde } z_2 - 1 \neq 0 \\ \frac{n_1-1}{z_2-1} = n_0(n_1-1) - n_1, \text{ unde } n_1 - 1, z_2 - 1 \text{ si}$$

$$n_0(n_1-1) + n_1 - 1 \text{ sunt} \\ \text{trei numere intregi, } n_1 - 1 > 0, z_2 - 1 > 0, \text{ deci si} \\ n_0(n_1-1) + n_1 - 1 > 0 \\ z_2 - 1 \leq n_1 - 1 \\ z_2 \leq n_1.$$

Din (1) obtinem $n_1 \leq z_2$. Rezulta $z_2 = n_1$, apoi $1 = n_0(n_1-1) - n_1$

, deci

$$n_0(n_1-1) = n_1 + 1, \quad n_0(n_1-1) = n_1 - 1 + 2, \quad (n_0-1)(n_1-1) = 2,$$

unde

$$n_0 - 1 \text{ si } n_1 - 1 \text{ sunt doua numere intregi, } n_1 - 1 \geq 1 \\ n_0 - 1 = 1, n_1 - 1 = 2 \text{ sau } n_0 - 1 = 2, n_1 - 1 = 1 \\ n_0 = 2, n_1 = z_2 = 3 \text{ sau } n_0 = 3, n_1 = z_2 = 2$$

$$(2) \quad \text{Daca } t = 2, (n_0, n_1, z_2) \in L_2, \text{ atunci: } z_2 = n_1 \\ \text{si}$$

$$L_2 = \{ (2,3,3), (3,2,2) \}.$$

* * *

Pentru $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, $t \geq 3$, obtinem :

$$n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1)(z_t-1) = n_1n_2\dots n_{t-1}z_t - 1 \\ n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1)(z_t-1) = n_1n_2\dots n_{t-1}(z_t-1) + n_1n_2\dots n_{t-1} - 1$$

unde $z_t - 1 \neq 0$

$$\frac{n_1n_2\dots n_{t-1}-1}{z_t-1} = n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1) - n_1n_2\dots n_{t-1},$$

$$\text{unde } n_1n_2\dots n_{t-1} - 1, z_t - 1, n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1)$$

$$n_1n_2\dots n_{t-1}$$

sunt trei numere intregi, $n_1n_2\dots n_{t-1} - 1 > 0$, $z_t - 1 > 0$, deci

$$n_0(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_{t-1}-1) - n_1n_2\dots n_{t-1} > 0 \\ z_t - 1 \leq n_1n_2\dots n_{t-1} - 1$$

$$x_t \leq n_1 n_2 \dots n_{t-1} \quad .$$

(3) Dacă $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, x_t) \in L_t$, $t \geq 3$, atunci :

$$\begin{aligned} x_t &\leq n_1 n_2 \dots n_{t-1} \quad , \\ n_0 (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) - n_1 n_2 \dots n_{t-1} &> 0 \quad , \\ n_0 (n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) &> n_1 n_2 \dots n_{t-1} \quad , \\ n_0 &> \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} > \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-2}}{n_{t-2}-1} > \dots > \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} > \\ \frac{n_1}{n_1-1} &> 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0 &> 1 \\ n_0(n_1 - 1) &> n_1 \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) &> n_1 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-2} - 1) &> n_1 n_2 \dots n_{t-2} \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) &> n_1 n_2 \dots n_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0 &\geq 2 \\ n_0(n_1 - 1) &\geq n_1 + 1 \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) &\geq n_1 n_2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-2} - 1) &\geq n_1 n_2 \dots n_{t-2} + 1 \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1) &\geq n_1 n_2 \dots n_{t-1} + 1 \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(x_t - 1) &= n_1 n_2 \dots n_{t-1} x_t - 1 \\ n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(x_t - 1) &\leq n_1 n_2 \dots n_{t-1} x_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{n_1}{n_1-1} \leq \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \leq \dots \leq \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} \leq n_0 \leq \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{t-1}}{n_{t-1}-1} \cdot \\ \frac{x_t}{x_t-1} & \quad . \end{aligned}$$

(4) Dacă $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_r, \dots) \in L_t$, $t \geq 3$, r este un numar intreg , $2 \leq r \leq t-1$, pentru care este adevarata egalitatea :
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_r - 1) = m_1 m_2 \dots m_r + 1$,
 atunci :
 $m_r \leq m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$.

Intr-adevar,

$$\begin{aligned} m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_r - 1) &= m_1 m_2 \dots m_{r-1} (m_r - 1) + m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1 \quad , \\ \text{unde } m_r - 1 &\neq 0 \\ \frac{m_1 m_2 \dots m_r + 1}{m_r - 1} &= m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1} \quad , \end{aligned}$$

unde $m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$, $m_r - 1$,
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1}$
 sunt trei numere întregi, $m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1 > 0$, $m_r - 1 \geq 0$, deci
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1} \geq 0$
 și
 $m_r - 1 \leq m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$
 $m_r \leq m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$.

(5) Dacă $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_r, \dots) \in L_t$, $t \geq 3$, $2 \leq r \leq t-1$,
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_r - 1) = m_1 m_2 \dots m_r + 1$ și m_r
 $= m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$,
 atunci:
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$.

Intr-adevar, din
 $\frac{m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1}{m_r - 1} = m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) - m_1 m_2 \dots m_{r-1}$
 și
 $m_r = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 2$
 rezulta:
 $m_0(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{r-1} - 1) = m_1 m_2 \dots m_{r-1} + 1$.

Dacă în $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \geq 3$,
 cel puțin unul dintre numerele $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ ar fi par, atunci:

$n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t$ este par
 $n_1 n_2 \dots n_{t-1} z_t - 1$ este impar
 $n_0(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_{t-1} - 1)(z_t - 1)$ este impar
 $n_0, n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{t-1} - 1, z_t - 1$ sunt impare
 $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt pare și n_0 este impar.

În caz contrar,

$n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt impare.

(6) Dacă $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \geq 2$, atunci toate
 numerele

$n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ au aceeași paritate.

Sunt numai două CAZURI:

CAZUL 1⁰: $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt impare,

$2 \leq n_0$, $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$

CAZUL 2⁰: $n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt pare și n_0 este impar,

$3 \leq n_0$, $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{t-1} \leq z_t$.

Nu mai există alte cazuri, în afara de “1⁰” și “2⁰”.

(7) Dacă $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t) \in L_t$, unde $t \geq 3$, atunci numerele
 $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t-1}, z_t$ sunt în CAZUL 1⁰ ori în CAZUL 2⁰.

* * *

Dacă $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t) \in L_t$, $t \geq 3$, spunem că :
 x_0 este pe poziția "0", x_1 este pe poziția "1", x_2 este pe poziția "2",

...

x_{t-1} este pe poziția "t-1", x_t este pe poziția "t".

Cele mai mici numere *posibile* într-un CAZ fixat dintre cele două

CAZURI

posibile, oricare ar fi acest caz, pe pozițiile "0", "1", "2", ..., "t-1", "t",

se notează, respectiv, cu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t$, unde

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t) \in L_t.$$

Obținem :

– în CAZUL 1^0 : $a_0 = 2$, $a_1 = 3$;

– în CAZUL 2^0 : $a_0 = 3$, $a_1 = 2$.

În ambele CAZURI :

$$a_0(a_1 - 1) = a_1 + 1 \quad (\text{Într-adevăr, } 2(3-1)=3+1 \text{ și } 3(2-1)=2+1 \text{ .})$$

Reciproc, dacă $a_0(a_1 - 1) = a_1 + 1$, atunci :

$$a_0(a_1 - 1) = a_1 - 1 + 2, \quad (a_0 - 1)(a_1 - 1) = 2, \text{ unde}$$

$$a_1 - 1 \geq 1; \quad a_0 - 1 = 1, \quad a_1 - 1 = 2 \text{ sau } a_0 - 1 = 2, \quad a_1 - 1 = 1$$

$$\text{CAZUL } 1^0 : a_0 = 2, \quad a_1 = 3 \text{ sau CAZUL } 2^0 : a_0 = 3, \quad a_1 = 2.$$

Fixăm un CAZ (CAZUL 1^0 ori CAZUL 2^0), apoi continuăm astfel :

Pentru $(a_0, a_1, x_2, \dots) \in L_t$, unde $t \geq 3$, dintr-o inegalitate nestricta

a lui (3) obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(x_2 - 1) \geq a_1 x_2 + 1$$

$$(a_1 + 1)(x_2 - 1) \geq a_1 x_2 + 1$$

$$a_1 x_2 + x_2 - a_1 - 1 \geq a_1 x_2 + 1$$

$$x_2 \geq a_1 + 2.$$

Cel mai mic x_2 *posibil* este

$$a_2 = a_1 + 2,$$

dacă $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in L_t$,

pentru care inegalitățile nestricte din ultima parte sunt realizate

prin egalități, deci :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) = a_1 a_2 + 1,$$

$$\text{dacă } (a_0, a_1, a_2, \dots) \in L_t.$$

Pentru $(a_0, a_1, a_2, x_3, \dots) \in L_t$, unde $t \geq 4$, dintr-o inegalitate nestricta

a lui (3) obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1)(x_3 - 1) \geq a_1 a_2 x_3 + 1$$

$$(a_1 a_2 + 1)(x_3 - 1) \geq a_1 a_2 x_3 + 1$$

$$a_1 a_2 x_3 + x_3 - a_1 a_2 - 1 \geq a_1 a_2 x_3 + 1$$

$$x_3 \geq a_1 a_2 + 2.$$

Cel mai mic x_3 *posibil* este

$$a_3 = a_1 a_2 + 2,$$

dacă $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in L_t$,

pentru care inegalitățile nestricte din ultima parte sunt realizate

prin egalitati , deci :

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1) = a_1a_2a_3 + 1, \\ \text{daca } (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in L_t, \text{ unde } t \geq 4.$$

Procedam analog , pas cu pas . Obtinem :

Pentru $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, x_r, \dots) \in L_t$, unde r este numar intreg, $2 \leq r \leq t-1$,

si

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{r-1}-1) = a_1a_2\dots a_{r-1} + 1, \\ \text{dintr-o inegalitate nestricta a lui (3) obtinem} \\ a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{r-1}-1)(x_r-1) \geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r + 1 \\ (a_1a_2\dots a_{r-1} + 1)(x_r-1) \geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r + 1 \\ a_1a_2\dots a_{r-1}x_r + x_r - a_1a_2\dots a_{r-1} - 1 \geq a_1a_2\dots a_{r-1}x_r + 1 \\ x_r \geq a_1a_2\dots a_{r-1} + 2.$$

Cel mai mic x_r *posibil* este

$$a_r = a_1a_2\dots a_{r-1} + 2, \\ \text{daca } (a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots) \in L_t, \text{ unde } 2 \leq r \leq t-1, \\ \text{pentru care inegalitatile nestricta din ultima parte sunt realizate} \\ \text{prin egalitati , deci :}$$

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_r-1) = a_1a_2\dots a_r + 1, \text{ unde } 2 \leq r \leq t-1.$$

Pentru $r = t-1$ si $t \geq 3$ obtinem :

$$a_{t-1} = a_1a_2\dots a_{t-2} + 2, \\ \text{daca } (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \dots) \in L_t,$$

si

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{t-1}-1) = a_1a_2\dots a_{t-1} + 1.$$

Daca $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t) \in L_t$, atunci :

$$a_0(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{t-1}-1)(\omega_t-1) = a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t - 1 \\ (a_1a_2\dots a_{t-1} + 1)(\omega_t-1) = a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t - 1 \\ a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t + \omega_t - a_1a_2\dots a_{t-1} - 1 = a_1a_2\dots a_{t-1}\omega_t - 1 \\ \omega_t = a_1a_2\dots a_{t-1}.$$

Numarul ω_t este determinat de $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1})$, unde $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t) \in L_t$.

Toate conditionarile (care incep cu *daca ...*) de pe parcurs si toate cele *posibile* sunt indeplinite ,

deoarece apartenenta

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t) \in L_t \text{ este adevarata .}$$

Constatam :

$$a_2 = a_1 + 2 = (a_1 + 1)^{2^0} + 1, \text{ daca } t \geq 3; \\ a_3 = a_1a_2 + 2 = (a_2 - 2)a_2 + 2 = a_2^2 - 2a_2 + 1 + 1 = (a_2 - 1)^2 + 1 = \\ [(a_1 + 1)^{2^0}]^2 + 1 \\ a_3 = a_1a_2 + 2 = (a_1 + 1)^{2^1} + 1, \text{ daca } t \geq 4;$$

$$a_4 = a_1 a_2 a_3 + 2 = (a_1 a_2) a_3 + 2 = (a_3 - 2) a_3 + 2 = (a_3 - 1)^2 + 1 = [(a_1 + 1)^{2^2}]^2 + 1$$

$$a_4 = a_1 a_2 a_3 + 2 = (a_1 + 1)^{2^2} + 1, \text{ dacă } t \geq 5.$$

Pentru un număr întreg r , $2 \leq r \leq t-1$,

$$a_r = a_1 a_2 \dots a_{r-1} + 2 = (a_1 + 1)^{2^{r-2}} + 1, \text{ dacă } 2 \leq r \leq t-1.$$

Obținem :

$$(a_0, a_1, \dots) \in L_t$$

$$a_0(a_1 - 1) = a_1 + 1$$

$$\text{In CAZUL } 1^0 : a_0 = 2, a_1 = 3,$$

$$a_r = (a_1 + 1)^{2^{r-2}} + 1 = 4^{2^{r-2}} + 1, \text{ pentru } 2 \leq r \leq t-1$$

$$\omega_t = (a_1 + 1)^{2^{t-2}} - 1 = 4^{2^{t-2}} - 1.$$

$$\text{In CAZUL } 2^0 : a_0 = 3, a_1 = 2,$$

$$a_r = (a_1 + 1)^{2^{r-2}} + 1 = 3^{2^{r-2}} + 1, \text{ pentru } 2 \leq r \leq t-1$$

$$\omega_t = (a_1 + 1)^{2^{t-2}} - 1 = 3^{2^{t-2}} - 1.$$

Consacram notațiile $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t$ pentru aceste numere, în orice

CAZ

(CAZUL 1^0 sau CAZUL 2^0 . Nu mai există alte CAZURI !)

Parcurgem drumul în sens invers, în situația $t \geq 3$,

fără să schimbăm numerele cu notațiile consacrate anterior, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t$, într-unul dintre cele două CAZURI, oricare ar fi CAZUL (CAZUL 1^0 sau CAZUL 2^0).

Obținem :

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \omega_t) \in L_t$$

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-1} - 1)(\omega_t - 1) = a_1 a_2 \dots a_{t-1} \omega_t - 1$$

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-1} - 1)(\omega_t - 1) =$$

$$a_1 a_2 \dots a_{t-1}(\omega_t - 1) + a_1 a_2 \dots a_{t-1} - 1$$

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{t-1} - 1}{\omega_t - 1} = a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-1} - 1) - a_0 a_1 a_2 \dots a_{t-1} \text{ și}$$

$$\omega_t = a_1 a_2 \dots a_{t-1}.$$

Din acestea și (3) rezultă că :

numărul $\omega_t = a_1 a_2 \dots a_{t-1}$ este cel mai mare număr *posibil* pe poziția “t”,

pentru

care obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-1} - 1) = a_1 a_2 \dots a_{t-1} + 1$$

și

$$a_{t-1} = a_1 a_2 \dots a_{t-2} + 2 \text{ este cel mai mare număr } \textit{posibil} \text{ pe poziția “t-1”}$$

conform relației (4) .

Din ultimele două egalități și (5) rezultă că :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-2} - 1) = a_1 a_2 \dots a_{t-2} + 1.$$

Procedăm analog, pas cu pas.

Din

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-s+1} - 1) = a_1 a_2 \dots a_{t-s+1} + 1, \text{ pentru } 2 \leq s \leq t-1,$$

$a_{t-s+1} = a_1 a_2 \dots a_{t-s} + 2$ este cel mai mare număr *posibil* pe poziția “t-s+1”,
și (5)

obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{t-s} - 1) = a_1 a_2 \dots a_{t-s} + 1.$$

Notăm :

$$r = t - s + 1, \text{ pentru } 2 \leq s \leq t - 1,$$

$$2 \leq r \leq t - 1$$

Rezulta ca :

Din (4) și (5) obținem : numărul $a_r = a_1 a_2 \dots a_{r-1} + 2$ este cel mai mare număr

posibil pe poziția “r”, unde $2 \leq r \leq t - 1$,
pentru care obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_r - 1) = a_1 a_2 \dots a_r + 1, \quad 2 \leq r \leq t - 1,$$

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_{r-1} - 1) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} + 1, \quad 2 \leq r \leq t - 1$$

Pentru $s = t - 1$ (sau $r = 2$) rezulta :

Numărul $a_2 = a_1 + 2$ este cel mai mare număr pe poziția “2”, pentru
care obținem :

$$a_0(a_1 - 1)(a_2 - 1) = a_1 a_2 + 1,$$

$$a_0(a_1 - 1) = a_1 + 1.$$

Din ultima egalitate obținem a_1 , care este cel mai mare număr pe poziția
“1” și

a_0 , care este cel mai mare număr pe poziția “0”, în CAZUL 1^0 ori în
CAZUL 2^0 .

Numerele $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ sunt toate simultan în același CAZ,
oricare ar fi

acest CAZ (CAZUL 1^n ori CAZUL 2^n). Acestea au fost calculate anterior.

Într-un CAZ fixat $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_t$ sunt și cele mai mari și cele
mai

mici, deci sunt *unice* pe pozițiile, respectiv, “0”, “1”, “2”, ..., “t-1”, “t”.

Rezulta :

$$L_t = \{ (2, 3, 4^{2^0} + 1, 4^{2^1} + 1, \dots, 4^{2^{t-2}} + 1, 4^{2^{t-1}} - 1), (3, 2, 3^{2^0} + 1, 3^{2^1} + 1, \dots, 3^{2^{t-2}} + 1, 3^{2^{t-1}} - 1) \},$$

pentru $t \geq 3$.

Din aceasta și cele de pe tot parcursul, inclusiv (2), rezulta :

TEOREMA 1. Dacă $(c, b_1, b_2, \dots, b_{t-1}, \beta_t) \in L_t$, unde $t \geq 2$, atunci :

$$\beta_t = b_1 b_2 \dots b_{t-1}.$$

* * *

Presupunem că există numere întregi N și k , $N \geq 2$, $k \geq 1$, astfel
încât :

$$(8) \quad k[N] = N - 1, \text{ unde } N \text{ și } k \text{ sunt numere întregi, } N \geq 2, k \geq 1.$$

Fixam un N si un k astfel incat (8) este adevarata, in conditiile impuse, pe care nu le schimbam pana la sfarsit, oricare ar fi acestea.

Pentru acest N exista si sunt unice urmatoarele numere intregi cu proprietatile alaturate lor :

numarul intreg t ,

$$t \geq 1$$

numerele $prims\ p_1, p_2, \dots, p_t$,

$$2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_t \text{ (daca}$$

$t \geq 2$) ,

respectiv, numerele intregi $r_1, r_2, \dots, r_t$,

$$r_1 \geq 1, r_2 \geq 1, \dots, r_t \geq 1,$$

astfel incat

$$(9) \quad N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t} \quad ([1], p.74)$$

Pentru (9) obtinem :

$$(10) \quad \phi[N] = p_1^{r_1-1}(p_1-1)p_2^{r_2-1}(p_2-1)\dots p_t^{r_t-1}(p_t-1) \quad ([1], p.116)$$

Presupunem ca ar exista cel putin un numar intreg s , $1 \leq s \leq t$, astfel incat $r_s \geq 2$. Pentru un astfel de s , din (10), (9) si (8) obtinem :

numarul p_s ar ~~divide~~ 1 , care contrazice $2 \leq p_s$. Deci presupunerea facuta

este

falsa. In consecinta $r_1 = r_2 = \dots = r_t = 1$ si

din (9), (10) si (8) obtinem urmatoarele trei egalitati, respectiv :

$$(11) \quad N = p_1 p_2 \dots p_t$$

$$(12) \quad \phi[N] = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1)$$

$$(13) \quad k(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1) = p_1 p_2 \dots p_t - 1$$

Presupunem ca $t \geq 2$. Din (1) si (13), tinand seama de proprietatile numerelor care sunt in (13), obtinem :

$$(14) \quad (k, p_1, p_2, \dots, p_t) \in I_t$$

Deoarece $t \geq 2$, din (14) si TEOREMA 1. rezulta :

$$(15) \quad p_t = p_1 p_2 \dots p_{t-1}$$

■ Daca $t = 2$, din (15) obtinem $p_2 = p_1$, care contrazice

$$p_1 < p_2.$$

Deci $t \neq 2$.

■ Daca $t \geq 3$, din (15) obtinem :

$$p_t = p_1 p_2 \dots p_{t-1}, \text{ unde } t-1 \geq 2,$$

care contrazice p_t este *prim*. Deci $t \geq 3$.

■ Deoarece t este numar intreg, $t \geq 1$, $t \neq 2$ si $t \geq 3$

rezulta ca

$t = 1$, situatie in care din (11), (12), (13) obtinem,

respectiv :

$$(16) \quad N = p_1, \text{ unde } p_1 \text{ este } prim, p_1 \geq 2$$

$$(17) \quad \phi[N] = p_1 - 1$$

$$(18) \quad k(p_1 - 1) = p_1 - 1, \text{ unde } p_1 - 1 \geq 1$$

Din (18) obținem :

$$\begin{aligned} (k-1)(p_1-1) &= 0, \text{ unde } p_1-1 \neq 0 \\ k-1 &= 0 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Din (8) am obținut N este *prtm* și $k=1$. Aceste condiții sunt *necesare* pentru (8).

Reciproc, dacă N este *prtm*, $N \geq 2$, și $k=1$, atunci :

$\phi[N] = N-1$, $1 \cdot (N-1) = N-1$, deci $k \phi[N] = N-1$, care este chiar (8).

Am demonstrat *suficienta* condițiilor. Obținem :

TEOREMA 2. Fie numerele întregi N și k , $N \geq 2$ și $k \geq 1$.

- (i) $k[N] = N-1$ dacă și numai dacă N este *prim* și $k=1$.
 (ii) $[N]$ *divide* $N-1$ dacă și numai dacă N este *prim*.

Am demonstrat (i). Din (i) rezulta (ii).

Prin TEOREMA 2. am rezolvat Ecuația $k[N] = N-1$ și Conjectura lui D.H.Lehmer referitoare la aceasta.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Vasile BOBANCU și colaboratorii, *Dictionar de Matematici Generale*, Editura Enciclopedica Romana, 1974
- [2] Marian DEACONESCU, ON THE EQUATION $m-1 = a\phi(m)$, INTEGERS : ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY 6 (2006),
- [3] Nicodim A. NEGREA, *Solutionarea unei conjecturi din 1932 a lui D. H. Lehmer in 2010*, Revista Electronica MateInfo.ro ISSN 2065-6432 Noiembrie 2010
- [4] John RENZE, *Computational Evidence for Lehmer's Totient Conjecture*, Wolfram Library Archive

A06

5. Teorema lui Lagrange ; Aplicații ale teoremei lui Lagrange în demonstrarea unor relații trigonometrice

Prof. Voinea-Axinte Costică
Liceul Tehnologic "Elie Radu" Botoșani

Noțiuni teoretice

Teorema (Teorema lui Lagrange sau teorema creșterilor finite)

Fie f o funcție Rolle pe un interval compact $[a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstrație: Considerăm funcția auxiliară $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = f(x) - k \cdot x$, unde k este o constantă reală pe care o determinăm astfel încât $F(a) = F(b)$.

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Leftrightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

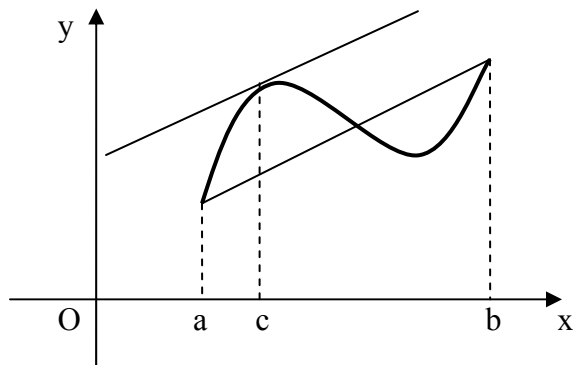
Pentru $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = f(x) - k \cdot x$ verifică condițiile teoremei

lui Rolle $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ astfel încât $F'(c) = 0$.

$$\text{Dar } F'(x) = f'(x) - k, \forall x \in (a, b), \quad f'(c) - k = 0 \Rightarrow f'(c) = k \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observație (Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange)

Fie f o funcție Rolle pe un interval compact $[a, b]$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în $(c, f(c))$ este paralelă cu coarda determinată de punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.



Observația Se poate aplica teorema lui Lagrange restricției funcției f la orice subinterval $[a, x] \subset [a, b]$, unde $a < x \leq b$. În acest caz $\exists c_x \in (a, x)$ care depinde de x astfel încât

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(c_x).$$

Dacă $x \rightarrow a$ atunci $c_x \rightarrow a$.

Observația Dacă în formula creșterilor finite notăm $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$, obținem $0 < \lambda < 1$ și

$c = a + \lambda(b - a)$. În acest caz concluzia teoremei lui Lagrange se mai scrie:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(a + \lambda(b - a)), \text{ cu } 0 < \lambda < 1.$$

Consecința funcției cu derivata nulă. Dacă o funcție are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.

Demonstratie: Fie $f : E \rightarrow R$ o funcție derivabilă în punctele din interiorul lui E și continuă pe E , E interval și $a \in E$ fixat. Dacă $x \in E$ este arbitrar, atunci conform teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[a, x]$ sau $[x, a]$ există un punct $c \in (a, x)$ sau $c \in (x, a)$ astfel încât $f(x) - f(a) = (x - a) f'(c)$. Cum $f'(c) = 0$ avem $f(x) = f(a)$, oricare ar fi x din E , ceea ce arată că f este constantă pe E .

Consecința funcției cu derivate egale. Dacă două funcții au derivatele egale pe un interval, atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Demonstratie: Fie $f, g : E \rightarrow R$ derivabile pe interiorul lui E și continue pe E , E fiind interval, cu $f'(x) = g'(x), \forall x \in E$. Această condiție scrisă sub forma $(f - g)'(x) = 0, \forall x \in E$ arată că se poate aplica consecința 1. Deci există o constantă $k \in R$ astfel încât $f(x) - g(x) = k, \forall x \in E$, altfel spus cele 2 funcții diferă printr-o constantă pe intervalul E .

Consecința monotoniei funcțiilor. Fie $f : E \rightarrow R, E$ interval, o funcție derivabilă.

- 1) Dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$ atunci f este crescătoare pe E ;
- 2) Dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in E$ atunci f este descrescătoare pe E ;
- 3) Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in E$ atunci f este strict crescătoare pe E ;
- 4) Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in E$ atunci f este strict descrescătoare pe E .

Demonstratie: Fie $x_1, x_2 \in E; x_1 < x_2$ și $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0$ ceea ce arată că $f(x_1) \leq f(x_2)$, deci funcția este crescătoare pe E .

Prima parte a acestei teoreme poate fi întărită în sensul că există funcții astfel încât $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$, dar f să fie strict crescătoare pe E , exemplul uzual fiind cel al funcției putere $f : R \rightarrow R, f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in R$, dar funcția f este o funcție strict crescătoare.

Asadar avem teorema: Funcția f este strict crescătoare dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$ și mulțimea punctelor în care derivata se anulează nu include nici un interval nedegenerat.

Consecința derivata unei funcții într-un punct. Fie $f : E \rightarrow R, E$ interval și $x_0 \in E$. Dacă: 1) f este continuă în x_0 ;
2) f este derivabilă pe $E - \{x_0\}$;

3) exista $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci f are derivata în x_0 și $f'(x_0) = l$

Consecința Fie f o funcție definită pe o vecinătate V a punctului x_0 , derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ și continuă în x_0 . Dacă există limita $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, atunci $f'(x_0)$ există și $f'(x_0) = \lambda$. Dacă λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0 .

Demonstrație Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe un interval $[x, x_0] \subset V, x < x_0 \Rightarrow$

$$\exists c_x \in (x, x_0) \text{ astfel încât } f'(c_x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Prin urmare: } f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda \text{ (deoarece } c_x \rightarrow x_0 \text{ dacă}$$

$$x \rightarrow x_0, x < x_0).$$

Din teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe un interval $[x_0, x] \subset V, x > x_0 \Rightarrow \exists c_x \in (x_0, x)$

$$\text{astfel încât } f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Prin urmare: } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f'(c_x) = \lambda \text{ (deoarece } c_x \rightarrow x_0 \text{ dacă}$$

$$x \rightarrow x_0, x > x_0).$$

Din $f'_s(x_0) = \lambda$ și $f'_d(x_0) = \lambda \xrightarrow{f \text{ continua}} f$ are derivată în x_0 și $f'(x_0) = \lambda$.

Dacă în plus λ este finit $\xrightarrow{\text{definiției derivatei}} f$ este derivabilă în x_0 .

Aplicații ale teoremei lui Lagrange în demonstrarea unor relații trigonometrice

Aplicatia 1. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Soluție: Considerăm funcția $f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x$, o funcție derivabilă cu derivata

$$f'(x) = -2\sin x \cos x - \frac{1}{2}(-2)\sin 2x = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ deci conform "Consecința funcției cu}$$

derivata nulă" f este constantă. Cum $f(0) = \frac{1}{2}$ rezultă că $f = \frac{1}{2}$, adică $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Analog alegem $g(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos 2x$, funcție derivabilă cu derivata
 $g'(x) = 2 \sin x \cos x + \frac{1}{2}(-2) \sin 2x = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ deci conform "Consecinta functii cu derivata nula" f este constantă. Cum $g(0)=1/2$ rezultă că $g=1/2$, adică, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Aplicatia 2. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctg x$

Solutie: Cum $\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$, relația dată are sens. Considerăm funcția

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \arctg x.$$

$$f'(x) = - \frac{\frac{-2x(1-x^2) - 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

deci conform "Consecinta functii cu derivata nula" f este constantă.

Cum $f(0)=0$, rezultă că $f=0$

Aplicatia 3. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (\forall)x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Solutie: Considerăm funcția $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Cum $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ deci conform "Consecinta functii cu derivata nula" f este constantă. Cum $f(0) = \frac{\pi}{2}$, rezultă $f = \frac{\pi}{2}$

Bibliografie:

Gh. Gussi, O. Stăbășilă, I. Stoica, MATEMATICA - Elemente De Analiza Matematica - Clasa XI – EDP, 1991