MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro

(revistă lunară cu peste 60 000 de vizitatori unici pe luna)

MAI2013
ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

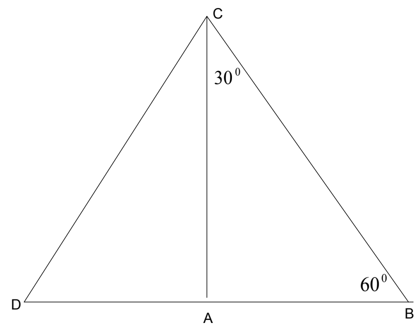
www.mateinfo.ro & www.bacmatemtica.ro

1. Folosirea unui triunghi echilateral în rezolvarea unor probleme

de NELA CICEU[2] şi ROXANA MIHAELA STANCIU[3]

1. *Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de* 30^0 *este jumătate din ipotenuză*.

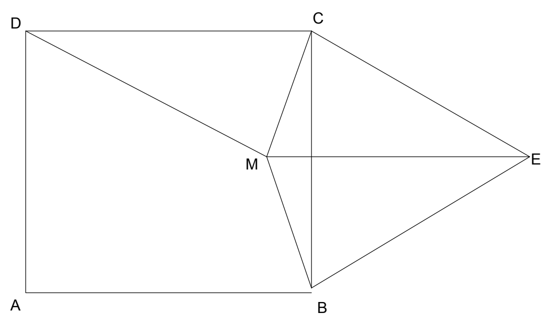
Soluţie:



Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A şi $\angle C = 30^0$. Construim triunghiul echilateral BCD astfel încât punctul A aparţine laturii BD. Înălţimea din C în acest triunghi este şi mediană, deci $AB = \frac{BD}{2}$, adică $AB = \frac{BC}{2}$.

2. *În interiorul pătratului $ABCD$ considerăm punctul M astfel încât $\angle MBC = \angle MCB = 15^0$. Să se demonstreze că triunghiul AMD este echilateral.*

Soluţie:



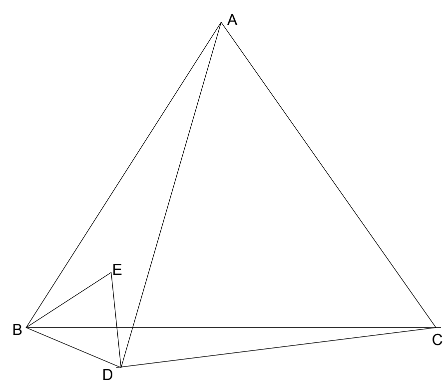
[2] Roşiori, Bacău
[3] Liceul cu Program Sportiv ''Iolanda Balas Soter'', Buzău

Construim în exteriorul pătratului, triunghiul echilateral BEC. Deoarece triunghiurile BEC și BMC sunt isoscele, avem $EM \perp BC$ (1). Pe de altă parte, în triunghiul MEC avem: $\angle MCE = 15^0 + 60^0 = 75^0$,
$\angle CME = 180^0 - \angle MCE - \angle MEC = 180^0 - 75^0 - 30^0 = 75^0$, deci $\angle MCE = \angle CME$ și $ME = CE = BC = DC$ (2). Din (1) și (2) rezultă că patrulaterul $MECD$ este paralelogram, deci $MD = CE = BC$. Analog obţinem $MA = AD$, adică triunghiul AMD este echilateral.

3. *În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construiește triunghiul BDC astfel încât $m(\angle BCD) = 10^0$ și $m(\angle CBD) = 20^0$. Să se demonstreze că triunghiul ABD este isoscel.*

(*Nela Ciceu*, **SCLIPIREA MINŢII**, **nr. XI, 2013**)

<u>Soluţie</u>:

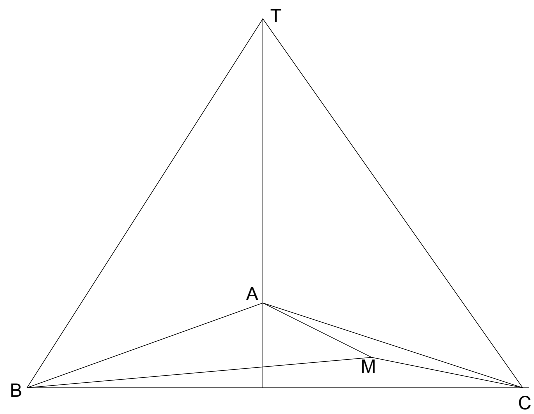


Construim, în interiorul triunghiului ABD, triunghiul echilateral BDE. Deoarece $BE = BD$, $AB = BC$ și $\angle ABE = \angle DBC = 20^0$, triunghiurile ABE și CBD sun congruente (L.U.L). Rezultă că $\angle AEB = \angle BDC = 150^0$ și apoi $\angle AED = 360^0 - 60^0 - 150^0 = 150^0$. Acum e ușor de văzut că triunghiurile ABE și ADE sunt congruente (AE - latură comună, $BE = ED$, $\angle AEB = \angle AED$), deci $AB = AD$.

4. *Fie ABC un triunghi isoscel cu $\angle B = \angle C = \alpha$, cu $30^0 < \alpha < 60^0$. În interiorul acestui triunghi considerăm punctul M astfel încât $\angle MBC = 60^0 - \alpha$ și $\angle MCB = 30^0$. Demonstraţi fără a folosi elemente de trigonometrie, că $\angle AMC = 150^0$.*

(**Generalizarea unei probleme propuse de Charalampos Stergioiu, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, nr. 4/2006**).

Soluţie:



Construim triunghiul echilateral TBC astfel încât punctele A și T sunt situayte de aceeași parte a dreptei BC. Deoarece ABC și TBC sunt triunghiuri isoscele, AT este mediatoarea laturii BC, astfel $\angle BTA = 30^0$. În triunghiurile BAT și BMC avem: $\angle ABT = 60^0 - \alpha = \angle MBC$, $\angle ATB = 30^0 = \angle MCB$ și $BC = BT$. Rezultă că triunghiurile BAT și BMC sunt congruente. Atunci $AB = AM$ și triunghiul ABM este isoscel. Deducem:

$\angle ABT = \angle MBC = 60^0 - \alpha$; $\angle ABM = 60^0 - 2(60^0 - \alpha) = 2\alpha - 60^0$;

$$\angle BAM = \frac{180^0 - \angle ABM}{2} = \frac{180^0 - (2\alpha - 60^0)}{2} = 120^0 - \alpha;$$

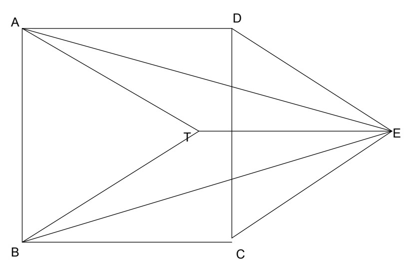
$\angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = (180^0 - 2\alpha) - (120^0 - \alpha) = 60^0 - \alpha$.

Astfel, $\angle AMC = 180^0 - \angle ACM - \angle MAC = 180^0 - (\alpha - 30^0) - (60^0 - \alpha) = 150^0$.

5. *Se dă un pătrat $ABCD$ și două semidrepte cu originile în A și B care traversează pătratul și se intersectează în punctul E. Dacă $m(\angle BAE) = m(\angle ABE) = 75^0$, atunci demonstraţi că triunghiul CDE este echilateral.*

(*Vasile Peiţa*, **RMT, nr. 4/2012**).

Soluţie:

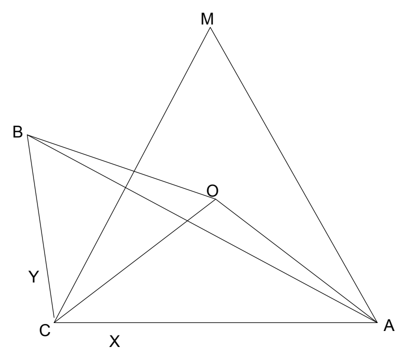


Construim, în interiorul pătratului, triunghiul echilateral ABT. Deoarece $\angle TAE = 15^0 = \angle AET$, deducem că $AT = TE$. Avem $TE \| AD$ și $TE = AT = AD$, și atunci patrulaterul $ATED$ este paralelogram. Rezultă că $DE = AT = AB = DC$, deci triunghiul CDE este echilateral.

6. *Fie ABC un triunghi astfel încât $\angle BAC = 30^0$ și $\angle ABC = 45^0$. Considerăm perechile de puncte X, Y astfel încât X aparţine semidreptei $(AC$, Y aparţine semidreptei $(BC$ și $OX = BY$, unde O este centru cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că mediatoarele segmentelor XY trec printr-un punct fix.*

(*Emil Kolev*, **Olimpiadă Bulgaria, 2006**).

<u>Soluţie</u>:



Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $OA = OB = OC = 1$. Deoarece $\angle BAC = 30^0$, atunci $\angle BOC = 60^0$ și deci triunghiul BOC este echilateral. Cum $\angle ABC = 45^0$, deducem că triunghiul AOC este dreptunghic, deci $AC = \sqrt{2}$. Dacă $X \equiv A$, atunci $OX = 1$ și $BY = 1$ și deci $Y \equiv C$; rezultă că punctul fix căutat se află pe mediatoarea segmentului AC.

Fie M un punct situate de aceeași parte a dreptei AC ca și O astfel încât triunghiul AMC este echilateral. Atunci $\angle OCM = 15^0, \angle MCB = 45^0$ și cu teorem cosinusului în triunghiul MCB obţinem:

$$BM^2 = MC^2 + BC^2 - 2 \cdot MC \cdot BC \cdot \cos \angle MCB = 2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,$$

deci triunghiul MBC este dreptunghic în B. Notăm $AX = \alpha$. Aplicând teorema cosinusului deducem:

$$OX^2 = OA^2 + AX^2 - 2 \cdot OA \cdot OX \cdot \cos \angle OAX = 1 + \alpha^2 - \alpha\sqrt{2};$$

$$MX^2 = MA^2 + AX^2 - 2 \cdot MA \cdot AX \cdot \cos \angle MAC = 2 + \alpha^2 - \alpha\sqrt{2} \quad (1)$$

și cu teorema lui *Pitagora* avem

$$MY^2 = MB^2 + BY^2 = MB^2 + OX^2 = \alpha^2 - \alpha\sqrt{2} + 2 \quad (2)$$

Relaţiile (1) și (2) ne arată că punctul fix M aparţine mediatoarelor segmentelor XY.

2.The solutions of the problems 202 and 209
LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPANOLA

Ioan Viorel Codreanu, Secondary School Satulung , Maramures

PROBLEMA 202. ***Propuesto par Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.***

Para un triangulo ABC denoteramos por r su inradio, por r_a, r_b y r_c sus exinradios, por I su incentro, y por I_a, I_b e I_c sus exincentros. Probar o refutar la desigualdad

$$\frac{\cos A}{1-\cos^2 A}+\frac{\cos B}{1-\cos^2 B}+\frac{\cos C}{1-\cos^2 C}\geq\frac{1}{4r}\sqrt{\frac{II_a\cdot II_b\cdot II_c}{r_ar_br_c}(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)}$$

Solution by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureș, Romania

Using known the equalities

$$\prod II_a=16R^2r,\prod r_a=s^2r,\sum r_ar_b=s^2,\sum\frac{1}{\sin^2 A}=\left(\frac{s^2+r^2+4Rr}{2sr}\right)^2-\frac{4R}{r}\text{ and}$$

$$\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=1+\left(\frac{4R+r}{s}\right)^2\text{, we have }\frac{1}{4r}\sqrt{\frac{\prod II_a}{\prod r_a}\cdot\sum r_ar_b}=\frac{R}{r}\text{ and}$$

$$\sum\frac{\cos A}{1-\cos^2 A}=\sum\frac{1}{1-\cos^2 A}-\sum\frac{1-\cos A}{1-\cos^2 A}=\sum\frac{1}{\sin^2 A}-\sum\frac{1}{1+\cos A}=$$

$$=\sum\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{4s^2r^2}-\frac{4R}{r}-\frac{(4R+r)^2}{2s^2}-\frac{1}{2}.$$

Then the inequality of statement becomes

$$\frac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{4s^2r^2}-\frac{4R}{r}-\frac{(4R+r)^2}{2s^2}-\frac{1}{2}\geq\frac{R}{r}$$

equivalent to

$$\left(s^2+r^2+4Rr\right)^2 \geq 20s^2Rr+2r^2(4R+r)^2+2s^2r^2$$

which after the calculations becomes

$$s^4-12s^2Rr \geq r^2(4R+r)^2 \qquad (*)$$

Using the **Gerretsen Inequality** $s^2 \geq 16Rr-5r^2$ we get

$$s^4-12s^2Rr = s^2\left(s^2-12Rr\right) \geq r^2(16R-5r)(4R-r)$$

and in order to prove the inequality $(*)$ it is sufficient to prove that

$$(16R-5r)(4R-r) \geq (4R+r)^2$$

equivalent to

$$48R^2-108Rr+24r^2 \geq 0$$

and by simplifying of 12, the last inequality is written

$$4R^2-9Rr+2r^2 \geq 0$$

or

$$(R-2r)(4R-r) \geq 0$$

that′s true if we consider the **Euler Inequality** $R \geq 2r$ and the solution ends.

PROBLEMA 209. ***Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartamento di Matematica, Universita degli studi di Tor Vergata, Roma.***

Sean a, b **y** c **numeros reales positivos tales que** $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$**. Probar que**

$$(a+b+c)^2+2\sqrt{abc}(a+b+c) \geq 4(ab+bc+ca).$$

First solution by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Romania

The inequality of the statement is written

$$\left(\sum a\right)\left(\sum a+2\sqrt{\prod a}\right) \geq 4\sum ab$$

and taking into account the condition $\sum a+2\sqrt{\prod a}=1$ becomes

$$\sum a \geq 4\sum ab \qquad (1)$$

If ABC is any triangle, the numbers $a=\sin^2\frac{A}{2}, b=\sin^2\frac{B}{2}, c=\sin^2\frac{C}{2}$ satisfy the condition of this problem; conversely, if $a,b,c>0$ verify $\sum a+2\sqrt{\prod a}=1$ then there is a triangle ABC so that $a=\sin^2\frac{A}{2}, b=\sin^2\frac{B}{2}, c=\sin^2\frac{C}{2}$. The inequality (1) is written

$$\sum \sin^2\frac{A}{2} \geq 4\sum \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} \qquad (2)$$

Given the known identities

$$\sum \sin^2\frac{A}{2}=\frac{2R-r}{2R}, \sum \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}=\frac{s^2+r^2-8Rr}{16R^2}$$

the inequality (2) becomes

$$\frac{2R-r}{2R} \geq 4\cdot\frac{s^2+r^2-8Rr}{16R^2}$$

equivalent to

$$s^2 \leq 4R^2+6Rr-r^2.$$

Taking into account the **Gerretsen Inequality**

$$s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$$

it is sufficient to prove that

$$4R^2+4Rr+3r^2 \leq 4R^2+6Rr-r^2$$

equivalent to the **Euler Inequality** $R \geq 2r$ and this ends the proof.

Second solution.

Keeping the ideas of first solution we prove the inequality (2) using the ***Ravi*** substitutions.

In the triangle ABC with sides α,β,γ and the semiperimeter s, we note $x=s-\alpha, y=s-\beta, z=s-\gamma$. We have

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$$

and two other similar relations. The inequality (2) becomes

$$\sum\frac{yz}{(x+y)(x+z)} \geq 4\sum\frac{xyz^2}{(x+y)^2(y+z)(z+x)}$$

equivalent to

$$\sum \frac{y+z}{x} \geq 4\sum \frac{z}{x+y}. \quad (3)$$

Using the obvious inequality

$$\frac{4x}{y+z} \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{z}$$

and two other similar inequalities, we get

$$4\sum \frac{x}{y+z} \leq \sum\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right) = \sum \frac{x+y}{z}$$

namely the inequality (3) and this ends the proof.

---

3. Matematica Antichităţii

de prof. Adrian Stan, Buzău

Pe câmpiile Africii, începând de acum 7 milioane de ani, evoluţia a dat naştere unei fiinţe care a învăţat să confecţioneze unelte, să stăpânească focul şi să comunice cu semenii săi printr-un limbaj articulat. Primele civilizaţii ale omenirii s-au dezvoltat de-a lungul marilor fluvii acum 4000 de ani î.e.n în China, acum 3000 de ani î.e.n în Egipt, Mesopotamia, America de Sud.

Inventarea roţii şi a plugului de sumerieni produce mari schimbări în agricultură, în dezvoltarea aşezărilor şi în schimbul de produse agricole şi meşteşugăreşti. Oraşele tind să devină aşezări complexe cu zeci de mii de locuitori.

Acum circa 3500 – 3000 de ani î. e. n. , în Mesopotamia, sumerienii consideraţi pionierii matematicii au dezvoltat scrierea cuneiformă pe tăbliţe de lut, pe când în Egipt în aceeaşi perioadă aproximativ s-a dezvoltat scrierea hieroglifică pe blocuri de piatră, pe papirusuri sau pe materiale asemănătoare hârtiei.

Acum circa 3200 de ani î. e. n., sumerienii au dezvoltat un sistem de numeraţie în baza 60; Din acest sistem, astăzi ne-a rămas ora de 60 de minute şi minutul de 60 de secunde. Pentru a scrie numere mari, foloseau puteri ale lui 60, de exemplu, pentru numărul 9548 ei scriau: 2x3600 + 3x600 + 9x60 + 8 iar pentru numerele de la 1 la 10 aveau simboluri corespunzătoare.

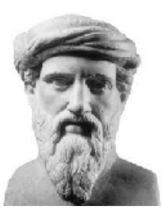
Acum circa 2750 de ani î. e. n. hinduşii au dezvoltat un sistem de numărare în baza 10 având asociate o serie de simboluri pentru cifrele de la 1 la 9 inclusiv pentru cifra 0 dar pe care nu o foloseau. Cu trecerea anilor simbolurile se transformă câte puţin şi sunt preluate de cultura arabă începând cu secolul al XI- lea după care ajung şi în Europa începând cu secolul al XV- lea într-o formă foarte asemănătoare cu ceea ce avem noi astăzi.

Prima civilizaţie avansată a Europei a apărut acum 2650 de ani î.e.n. în Creta, minoicii nelăsând însă foarte multe dovezi în urmă.

O dată cu inventarea alfabetului grec (circa 750 î.e.n) derivat din cel fenician, cultura greacă va ajunge la apogeu prin dezvoltarea propriilor oraşe şi începerea colonizării ţărmurilor Mării Mediterane, a Mării Negre şi a Mării Egee. Inevitabil, în lupta pentru supremaţie a oraşelor greceşti li se va opune marile imperii ale perşilor, etruscilor, Cartaginei şi Romei. Bazele culturii occidentale provin de la marii gânditori şi artişti ai Antichităţii care au adus inovaţii în sculptură, medicină, filozofie şi politică. Grecii înfiinţează numeroase colonii cum ar fi Siracuza în Sicilia, Miletul pe Coasta Asiei Mici, Cirene în nordul Africii. Actualele oraşe Reggio, Taranto, Istanbul, Marsilia, Odesa, Napoli, Malaga, Monaco, Nisa, Crotone sunt foste colonii greceşti. În secolele VI- V, î.e.n. Atena devine cea mai mare putere maritimă ca urmare a construirii galerelor.

În anul 546 î. e. n a murit filozoful grec **Thales din Milet**(~ 635 – 546, î.e.n). Considerat părintele ştiinţelor, întemeietor al şcolii ioniene, acesta a prezis eclipsa de soare din anul 585 î. e. n şi a avut mai multe contribuţii în geometrie. Prin studierea mişcării stelelor, în astronomie a adus contribuţii utile pentru navigaţie. De asemenea, a desenat prima hartă a Greciei şi a determinat înălţimea piramidelor . Un discipol al său, **Anaximandru din Milet(~610-546, î.e.n)** va fi întemeietorul geografiei ştiinţifice. Ideile sale vor influenţa lumea ştiinţifică. El era de părere că Pământul ar fi fost la început acoperit de apă, iar continentele s-ar fi format prin uscarea treptată a acestei mări primordiale.

Insula grecească Samos devine un oraş înfloritor în timpul domniei dictatorului Policrat, care atrage mulţi oameni de valoare printre care şi matematicianul **Theodorus**(cca 530 î.e.n) care conform izvoarelor greceşti ar fi folosit pentru prima dată tehnica şlefuirii pietrelor preţioase, metoda turnării bronzului prin procedeul de topire a cerii, precum şi folosirea echerului şi strungului, deşi se ştie că acestea ar fi apărut mai întâi în Orient.



În anii aproximativ 525 î. e. n. filozoful grec **Pitagora** (~ 584 - ~ 497, î.e.n) care era originar tot din Samos nu suportă tirania lui Policrat şi se refugiază în sudul Italiei, în Crotona, Italia de astăzi, unde înfiinţează celebra sa şcoală a pitagoreilor(hemiciclul lui Pitagora) în care conceptul de număr devine principiu fundamental în învăţătura lor şi anume: „ numărul este esenţa tuturor lucrurilor” afirmau ei. El a îmbinat cu succes sistemele de gândire ale filozofilor egipteni, perşi şi indieni aducând împreună cu discipolii săi importante contribuţii la dezvoltarea sistemului filozofic grecesc. Introducerea numărului iraţional $\sqrt{2}$ ca raport dintre diagonala şi latura pătratului a revoluţionat concepţia despre numere. De asemenea, discipolii săi cunoşteau media aritmetică, geometrică şi armonică a două numere, şi au conceput numerele perfecte, prietene, numerele pare şi impare, numerele prime, noţiunile de cel mai mic multiplu comun şi cel mai mare divizor comun. Şi în domeniul acusticii, pitagoreii au stabilit o serie de legi ale consonanţei muzicale.

Acum circa 380 î.e.n moare marele filozof **Democrit** discipol al lui **Leucip** şi al teoriei atomiste a lucrurilor şi anume că lucrurile sunt formate din atomi; Scoala sa materialistă se continuă cu **Epicur** care în jurul anului 306 î.e.n crează celebra sa şcoală filozofică.

Invenţia abacului a fost făcută probabil în sec. al XI-lea î.e.n în spaţiul indo-chinez, dar pentru prima dată a fost identificat pe o pictură de pe un vas ce datează din sec. al IV-lea î.e.n.

În anul 387 î.e.n **Platon**(427- 347, î.e.n) înfiinţează în Atena celebra sa şcoală filozofică , aşa numita Academia lui Platon pentru a preda discipolilor astronomie, biologie, matematică, politică, filozofie. Denumirile de aritmetică şi geometrie provin din scrierile sale. Unul dintre discipolii săi a fost şi **Aristotel** (384-322,î.e.n) un adevărat spirit enciclopedic, cel care avea să devină învăţătorul lui Alexandru cel Mare.

În anii aproximativ 300 î.e.n a fost realizată de către eruditul grec **Euclid** (~330-275,î.e.n) celebra sa colecţie de cărţi de matematică „ **Elementele**" , baza geometriei euclidiene, considerată cea mai citită carte ştiinţifică. Lucrarea sa strânge toate cunoştinţele de matematică ale vremii aducând şi o serie de descoperiri proprii. A introdus noţiunile de semidreaptă, tangentă, paralelogram, poliedru, a enunţat teorema catetei şi a înălţimii în triunghiul dreptunghic precum şi teorema reciprocă a lui Pitagora, a dat algoritmul de împărţire cu rest pentru numere naturale.

În anul 287 î.e.n se naşte la Siracusa, în Sicilia de astăzi, **Arhimede**(287-212,î.e.n), unul din cei mai importanţi matematicieni şi fizicieni ai Antichităţii. El construieşte maşinării diverse, defineşte legea pârghiilor construind astfel un scripete, determină greutatea specifică a metalelor, concepe un glob pământesc, are preocupări de calcul infinitezimal. A fost ucis în 212 î.e.n în asaltul oraşului de către romani.

În anul 260 î.e.n apare prima concepţie heliocentristă despre lume (Soarele în centrul Universului) la astronomul grec **Aristarh din Samos** (~310-230,î.e.n) care spre sfârşitul vieţii publică ideea că Pământul se învârte în jurul Soarelui, teză ce avea să fie dovedită de abia în secolul al XVI-lea de către **Nicolaus Copernic**(1473-1543). După uciderea regelui Ptolemeu al VII-lea, noul rege Ptolemeu al VIII-lea expulzează din Alexandria pe Aristotel şi pe mulţi alţi învăţaţi, contribuind astfel la decăderea culturală a Alexandrei.

În anul 240 î.e.n. , matematicianul grec **Eratostene** calculează pentru prima dată în Alexandria circumferinţa Pământului de 39690 Km foarte aproape de cea reală 40075 km. Considerat unul din cei mai învăţaţi din timpul său, este numit şeful Bibliotecii din Alexandria şi responsabil cu educaţia princiară de la curtea faraonului Ptolemeu al III-lea . De asemenea, a avut contribuţii importante în obţinerea numerelor prime, în geografie şi astronomie.

În anul 170 î.e.n matematicianul şi astronomul **Hypsicles din Alexandria** introduce în geometrie împărţirea cercului în 360 de grade, studind poliedrele el pregăteşte calea pentru trigonometrie.

În anul 179 î.e.n, matematicianul grec **Nicomedes** introduce noţiunea de concoidă (curbă).

În anul 138 î.e.n astronomul şi geograful **Hiparh** a introdus conceptele de longitudine şi latitudine în stabilirea poziţiei unui obiect.

Primul calculator mecanic datează din perioada anilor 82 î.e.n, fiind descoperit în epava unui vas lângă insula Rodos şi folosea la efectuarea unor calcule astronomice. Se putea calcula astfel ora exactă dacă se introducea în aparat înălţimea Soarelui şi datele geografice ale locului (latitudine şi longitudine).

În anul 48 î.e.n, în timpul asediului oraşului Alexandria de către trupele lui Caius Iulius Cezar, o mică parte a Bibliotecii din Alexandria ia foc. Biblioteca va mai suferii şi alte incendieri sau jefuiri în timpul împăraţilor Diocleţian sau Teodosiu dar ultima şi cea finală are loc în 641 e.n. de la califul Omar care ocupând oraşul şi văzând că printre atâtea cărţi nu se găseşte şi Coranul dă ordin să se incendieze toate cărţile.

În anul 46 î.e.n **Caius Iulius Cezar** sfătuinduse cu astronomul egiptean **Sosigene**, legiferează introducerea calendarului Iulian (după numele său) în care anul avea 365 de zile (an tropic) iar la 4 ani exista un an bisect. În luna februarie a anului 46 î.e.n se introduce luna bisectă normală, iar între lunile noiembrie şi decembrie urmează alte două care împreună au 67 de zile. Astfel, anul 46 î.e.n cu 455 de zile devine anul cel mai lung din istorie iar luna în care s-a născut împăratul Cezar denumită până atunci Quintilius va fi redenumită Iulius (Iulie).

În afara unei corecţii la acest calendar în timpul împăratului Augustus, calendarul avea să fie folosit până în anul 1582 când a fost introdus calendarul gregorian (după papa Grigore al XIII-lea).

În anul 39 î.e.n, savantul **Caius Asinius Pollio** întemeiază prima bibliotecă publică a oraşului Roma. General, administrator al provinciei Hispaniei şi apoi consul a fost preocupat de creaţia literară. El i-a promovat şi pe poeţii Vergiliu şi Horaţiu.

În anul 27 î.e.n, în care începea era imperială prin alegerea lui Octavian ca împărat cu titlul de Augustus, arhitectul roman **Vitruviu**(~ 70,î.e.n - ~15,e.n), îşi publica celebra sa carte în zece volume, „ De arhitectura” . El a inovat construcţia de apeducte dar a avut şi alte inovaţii inginereşti pentru care reprezintă un model pentru arhitecţii Renaşterii.

În anul 77 învăţatul **Pliniu „cel Bătrân**” demonstrează în lucrarea sa „ Historia naturalis” curbura suprafeţei Pământului. Opera lui Pliniu conţine referiri la cosmologie, etnologie, antropologie, zoologie, botanică, medicamente naturiste, mineralogie.

În anul 94, filozoful **Epictet** aparţinând de şcoala stoică este alungat din Roma de către împăratul Domiţian. El se mută la Nicopole în Epir, Grecia de astăzi, unde moare în anul 138.

În anul 100, astronomul **Cleomede** din Grecia este primul care descrie în lucrarea sa „ Despre mişcarea astrelor cereşti” refracţia astrelor.

În anul aproximativ 100 , matematicianul **Heron din Alexandria** termină opera sa „ Metricka” în care prezintă pentru prima dată aşa numita „formula lui Heron „ , a calculului ariei unui triunghi în funcţie de laturi, formulă datorată lui Arhimede(sec. 3 î.e.n), precum şi procedeul de rezolvare a ecuaţiei de gradul 2. Are foarte multe invenţii şi scrieri cu aplicaţii tehnice, face observaţii despre proprietăţile fizice ale corpurilor, inventează un termometru, prezintă principiul reflexiei luminii, precum şi o turbină cu aburi fiind considerat descoperitorul puterii aburului. De asemenea, a determinat volumul unor corpuri şi a dat o metodă de aproximare a rădăcinii cubice. În cartea sa Mehanika dă definiţia lucrului mecanic, regula paralelogramului de adunare a forţelor, expune mişcarea pe plan înclinat şi principiile opticii. Inventează clepsidra şi fântâna arteziană.

În anul 105, un eunuc chinez **Cai Lun** descoperă procedeul de obţinere a hârtiei, fiind astfel înobilat de impăratul Hedi. De abia în anul 751 arabii reuşesc să intre în posesia secretului fabricării hârtiei, de la soldaţii chinezi luaţi prizonieri şi prin cultura arabă tehnica va ajunge şi în Europa de abia în secolul al XIV-lea.

În anul 155 astronomul, matematicianul şi geograful **Claudiu Ptolemeu**(~87-167) realizează prima hartă precisă a Pământului. El afirmă că astrele se rotesc în jurul Pământului. În lucrarea sa „ Almageste" apărută în 147, el studiază planetele Jupiter, Saturn, Marte, Venus şiMercur. Teoria sa geocentrică susţinută de Biserică a fost combătută de mulţi alţi astronomi până în secolul al XVI-lea când **Nicolaus Copernic**(1473-1543) şi **Iohannes Kepler** (1571-1630) au demonstrat teoria heliocentrică potrivit căreia Pământul se roteşte în jurul Soarelui. Pe lângă diviziunea cercului în 360 de părţi congruente, Ptolemeu a construit o serie de instrumente geodezice şi a obţinut o serie de cunoştinţe trigonometrice.

În anul 220 funcţionarul roman **Sextus Iulius Africanus** descria o metodă de calcul a lăţimii unui râu fără să folosească măsurarea directă ci doar cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice.

În anul aproximativ 250, **Diofant din Alexandria** face primul o delimitare a algebrei de aritmetică.

În secolul trei , **Papos din Alexandria**(~290 - 350) avea să dea formularea teoremei celor trei perpendiculare, precum şi definiţia comună a conicelor, ca loc geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor la un punct fix şi la o dreaptă fixă este constantă. De asemenea, a dat şi formula lungimii medianei unui triunghi în funcţie de laturi.

În anul 462 matematicianul chinez **Zu Chongzhi** prezintă o nouă metodă de calcul calendaristic. El era cunoscut ca fiind autorul unei cărţi de matematică „ Zhui Shu" (Metodă de interpolare). A descoperit cu o precizie de 6 zecimale valoarea lui pi, şi de asemenea a determinat volumul sferei.

În anul 529, Academia lui Platon din Atena este închisă după 900 de ani de funcţionare. Înfiinţată în anul 385 î.e.n de către **Platon** pe un deal numit dumbrava eroului Akademos, de aici denumirea de academie, şcoala reunea studenţi care se dedicau studiului filozofiei, matematicii, astronomiei şi celorlalte ştiinţe şi mai ales a venerării lui Apollo.

Împăratul Iustinian nu vedea cu ochi buni această şcoală unde creştinismul nu era promovat în rândul disciplinelor şi ordonă în anul 529 închiderea acesteia pe motiv că ar fi „ lăcaş al învăţăturilor păgâne".

În anul 628 matematicianul şi astronomul indian **Brahmagupta** scrie un manual de matematică şi astronomie în versuri. El cunoştea calculul cu fracţii, cifra zero şi modul de rezolvare a unor ecuaţii şi al unor probleme de astronomie.

În lumea arabă, în timpul Evului Mediu la începutul secolului al IX-lea, **Al Khwarizmi** (780-850) a contribuit cu elaborarea primei table cu valori a funcţiei tangentă precum şi alte table de valori pentru sin şi cos. Matematicianul arab **Al Biruni** (973-1048) a demonstrat formula sinusului sumei şi a diferenţei măsurilor a două unghiuri, a sinusului unghiului dublu, teorema sinusurilor, precum şi tabele de valori ale sinusului şi tangentei. De asemenea, a avut ideea considerării cercului trigonometric cu raza unitară. A descris şi utilizat metoda triunghiulaţiei metodă dezvoltată de către civilizaţia arabă.

Un rol important în dezvoltarea trigonometriei ca ştiinţă de sine stătătoare au avut-o şi matematicienii **Abu al-Wafa(940-998)** , **Omar Khayam**(1048-1131), **Al Kashi**(1380-1429),
Nasir al-Din al-Tusi(1135-1213), care au îmbunătăţit calculele trigonometrice, au găsit valoarea pentru sin 1^0 şi au dat numeroase formule. **Abu al-Wafa**(940-998) a dat formula sin($a \pm b$) în forma ei modernă.

În anul 1202 prin lucrarea „ Liber Abaci”, **Leonardo Fibonacci** introduce în Europa sistemul de calcul cu cifre indoarabe. Fiu de negustor el a învăţat şi s-a format în Algeria. O dată întors în Europa, el s-a preocupat de obţinerea a numeroase aplicaţii practice în calculul economic, în geometrie, în calcularea şi împărţirea ariilor.

Bibliografie:
1.Cronica ilustrată a omenirii, Editura Litera,2011, Bucureşti,

Prof. , Liceul Tehnologic „ Costin Neniţescu”, Buzău

4.Polinom caracteristic . Teorema lui Hamilton-Cayley APLICATII.

Profesor Serban George-Florin
Liceul Tehnologic “Grigore Moisil “ Braila

Avand in vedere ca la olimpiadele de matematica la clasa a 11-a se dau exercitii cu Teorema lui Hamilton-Cayley , va propun un articol ce contine notiuni teoretice si practice despre aceasta tema .

Definiţie: Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de ordinul n cu coeficienţi complecşi. Atunci matricea $(A - xI_n)$ se numeşte matricea caracteristică a matricii A.

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

Definiţie: Polinomul $p_A(x) = (-1)^n \det(A - xI_n)$ se numeşte polinomul caracteristic al matricii A, iar rădăcinile sale se numesc valori proprii ale acestei matrici. (polinomul $p_A(x)$ are gradul n).

-Daca n=2 atunci $p_A(x)=x^2 - Tr(A)x + \det(A)$.

- Daca n=3 atunci $p_A(x) = x^3 - Tr(A)x^2 + Tr(A^*)x - \det(A)$.

Teoremă: Matricile AB şi BA au acelaşi polinom caracteristic.

Teorema lui Hamilton-Cayley: Orice matrice pătratică îşi satisface propria ecuaţie caracteristică.

$$p_A(A) = O_n \ , \quad \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$$

Pentru o matrice pătratică de ordinul doi avem:
$p_A(A)=A^2-(Tr(A))A+\det(A)I_2=0_2$.

EXERCITII

1) Fie A o matrice patratica de ordinul 2. Sa se arate ca daca exista n Є N , n≥ 3 astfel incat $A^n=O_2$, atunci $A^2=O_2$.

Olimpiada judeteana Braila 1993 . GM 2-3 /1992

Solutie : $A^n=O_2$, $\det(A^n)=0$, $\det(A)=0$, $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=0$. Deci $A^2=Tr(A)A$

Daca $Tr(A)=0$ atunci $A^2=O_2$. Daca $Tr(A)\neq 0$,$A^2=Tr(A)A \mid A^{n-2}$. Deci $A^n = Tr(A)A^{n-1}$, $A^{n-1}=O_2$. Analog se arata ca $A^{n-2}=O_2$, $A^{n-3}=O_2$,.... $A^2=O_2$.

2) Fie A o matrice patratica de ordinul 2 ,care verifica relatiile $\det(A-3I_2)=4$ si $\det(A+2I_2)=9$. Aratati ca $A^2=2A-I_2$.

Olimpiada judeteana de matematica Haimovici 2010

Solutie : $P(x)=\det(A-xI_2)$ polinomul caracterisic matricei A.
$P(x)=x^2-ax+b$. Deci $\det(A-3I_2)=4=P(3)$, $9-3a+b=4$, $-3a+b=-5$,
$\det(A+2I_2)=9=P(-2)$, $4+2a+b=9$, $2a+b=5$. Se obtine a=2 si b=1 , a=Tr A , b=det A , $A^2-Tr(A)A+\det(A)=0$, $A^2-2A+I_2=0$, $A^2=2A-I_2$.

3)Fie Asi B Є $M_2(C)$ doua matice inversabile cu AB=BA. Aratati ca :
a) $\det(A^*B+AB^*)=[\det(A+B)-(\det A+\det B)]^2$.
b) Daca $\det(A^*B+AB^*)=0$ atunci $\det(A+B)=\det A+\det B$

Profesor Serban George-Florin , Braila

Solutie: $A^*=A^{-1}\det A$,
$\det(A^*B+AB^*)=\det(A^{-1}B\det A+AB^{-1}\det B)=\det[\det B(A^{-1}B\det AB^{-1}+AB^{-1})]=$
$=(\det B)^2\det(A^{-1}B\det AB^{-1}+AB^{-1})$. Arat ca $A^{-1}B=BA^{-1}$. Se inmulteste aceasta egaliatate la stanga si la dreapta cu A si se obtine ca AB=BA.
$\det(A^*B+AB^*)=(\det B)^2\det(A^{-1}B\det AB^{-1}+AB^{-1})=(\det B)^2\det[(AB^{-1})^{-1}\det AB^{-1}+AB^{-1})]$
$[\det(A+B)-(\det A+\det B)]^2=(\det B)^2[\det(AB^{-1}+I_2)-\det AB^{-1}-1]$. Notez $C=AB^{-1}$.

Det $(C+C^*)=[\det(C+I_2)-\det C-1]^2$. $C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\det(C+C^*)=(TrC)^2$

$P(x)=\det(C-xI_2)$ polinomul caracterisic matricei C .
$P(x)=x^2-Tr(C)x+\det(C)$. $P(-1)=\det(C+I_2)=1+Tr(C)+\det C$
$[\det(C+I_2)-\det C-1]^2=(1+Tr(C)+\det C-\det C-1)^2=(TrC)^2=\det(C+C^*)$ qed.
b) Se foloseste punctul a).

4) Fie A si B $\in M_2(R)$ doua matice cu $A^2 + B^2 = AB$. Sa se arate ca $(AB-BA)^2=O_2$.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 2007

Solutie : Fie $p(x)=\det(A^2+B^2+x(AB-BA))=x^2\det(AB-BA)+ax+\det(A^2+B^2)$
Calculam $p(i)=\det(A-Bi)(A+Bi)$ si $p(-i)=\det(A+Bi)(A-Bi)$ deci $p(i)=p(-i)$
Se obtine astfel $a=0$, $p(x)=x^2\det(AB-BA)+\det(A^2+B^2)$.
Calculam $p(0)=\det(A^2+B^2)=\det(AB)$, $p(-1)=\det(A^2+B^2-AB+BA)=\det(BA)$
Deci $p(0)=p(-1)$ rezulta ca p este polinom constant deci $\det(AB-BA)=0$.
Aplic teorema lui Cayley $(AB-BA)^2-(Tr(AB-BA))((AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=O_2$
$Tr(AB)=Tr(BA)$, $(AB-BA)^2=O_2$.

5) Fie A si B $\in M_2(C)$ doua matice cu $A^2 + B^2 = 2AB$. Aratati ca :
a) AB=BA
b) TrA=TrB.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 2011

Solutie: Fie $p(x)=\det(A^2+B^2+x(AB-BA))=x^2\det(AB-BA)+ax+\det(A^2+B^2)$
Calculam $p(i)=\det(A-Bi)(A+Bi)$ si $p(-i)=\det(A+Bi)(A-Bi)$ deci $p(i)=p(-i)$
Se obtine astfel $a=0$, $p(x)=x^2\det(AB-BA)+\det(A^2+B^2)$.
Calculam $p(0)=\det(A^2+B^2)=\det(2AB)$, $p(-2)=\det(2BA)$, $p(0)=p(-2)$,
rezulta ca p este polinom constant deci $\det(AB-BA)=0$. Aplic teorema lui Cayley
$(AB-BA)^2-(Tr(AB-BA))((AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=O_2$
$Tr(AB)=Tr(BA)$, $(AB-BA)^2=O_2$.
$A^2+B^2=2AB$ rezulta ca $AB-BA=(A-B)^2$ deci $O_2=(AB-BA)^2=(A-B)^4$,
Aplic teorema lui Cayley $(A-B)^2-(Tr(A-B))(A-B)+\det(A-B)I_2=O_2$
$(A-B)^4=O_2$ rezulta ca $\det(A-B)=0$, $(A-B)^2=(Tr(A-B))(A-B)$, $(A-B)^3=(Tr(A-B))^2(A-B)$
$(A-B)^4=(Tr(A-B))^3(A-B)=O_2$, $Tr(A-B)=0$, $TrA=TrB$. qed
deci $(A-B)^2=O_2=AB-BA$ deci $AB=BA$ qed.

6) Fie $x>0$, un numar real si $A \in M_2(R)$ si $\det(A^2+xI_2)=0$.Demonstrati ca $\det(A^2+A+xI_2)=x$
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2006

Solutie: $\det(A^2+xI_2)=\det(A+\sqrt{x}\,i\,I_2)\det(A-\sqrt{x}\,i\,I_2)=0$
Deci $p(t)=\det(A+\sqrt{x}\,t\,I_2)=t^2x+(Tr\,A)\sqrt{x}\,t+\det A$, $P(i)=-x+(Tr\,A)\sqrt{x}\,i+\det A=0$
Obtinem $x=\det A$ si $TrA=0$. Aplic teorema lui Cayley $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=0_2$.
$A^2=-\det(A)I_2=-xI_2$, $\det(A^2+A+xI_2)=\det(-xI_2+A+xI_2)=\det A=x$. Qed.

7) Daca $A \in M_2(R)$, sa se arate ca $\det(A^2+A+I_2)\geq\frac{3}{4}(1-\det(A))^2$.

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2008

Solutie : Aplic teorema lui Cayley $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=O_2$.
$\det(A^2+A+I_2)=\det((1+TrA)A+(1-\det A)I_2)=\det(aA+bI_2)$
$p(x)=\det(aA+bxI_2)=b^2x^2+abxTrA+a^2\det A$.
unde $a=TrA+1$, $b=1-\det A$. $\det(A^2+A+I_2)=p(1)=b^2+abTrA+a^2\det A$.

$\det(A^2+A+I_2)= b^2 + ab\,(a-1) + a^2\,(1-b)= b^2 - ab + a^2 \geq \frac{3}{4}\, b^2$, $\frac{1}{4}\, b^2 - ab + a^2 \geq 0$

$(\frac{b}{2} - a)^2 \geq 0$ (A).

8) Fie A, B, C Є M_3 (R) , det(A)=det(B)=det (C) si det(A+iB)=det(C+iA). Aratati ca
det(A+B)=det(C+A) .

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2009

Solutie : p(x)= $\det(A+xB)=(\det B)x^3 + ax^2+bx + \det A$, $q(x)= \det(C+xA)=(\det A)x^3 + a_1x^2+b_1x+\det C$, $p(i) = \det(A+iB)=-i\,(\det B) - a + bi + \det A$, $p(i)=q(i)$
Analog $q(i) = -i\,(\det A) - a_1 + b_1 i + \det C$, deci $a=a_1$ si $b=b_1$.
$\det(A+B)=p(1)= \det B + a+b + \det A=q(1)= \det A + a_1+b_1+\det C$,
adevarat deoarece det(A)=det(B)=det (C) si $a=a_1$ si $b=b_1$.

9) Se considera numerele reale a , b cu $b-a^2>0$ .Determinati toate matricele AЄ M_2(R) astfel incat $\det(A^2 -2aA+bI_2)=0$

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 2010

Solutie:
$A^2 -2aA+bI_2 =(A-aI_2)^2 +(b-a^2)I_2=B^2 +c^2I_2$ unde $B=A-aI_2$, $c=\sqrt{b-a^2} >0$,

Deci $\det(B^2 + c^2I_2)=\det(B+icI_2)\det(B- icI_2)=0$. Fie $B=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ Є M_2(R)
Rezulta ca $\det(B+icI_2)=0$ sau $\det(B- icI_2)=0$ .Fie $p(x)= \det(B- xI_2)$ polinomul caracteristic matricei B , $p(ic)=0$ sau $p(-ic)=0$, $p(x)=x^2 -(m+q)x+(mq-np)$.
Se obtine ca $mq-np-c^2 + ic(m+q)=0$ sau $mq-np-c^2 - ic(m+q)=0$. Se obtine ca $m+q=0$, $mq-np-c^2=0$ deci $q= - m$ si $m^2+np+b-a^2=0$ .Matricele A vor fi de forma
$A=\begin{pmatrix} m+a & n \\ p & -m+a \end{pmatrix}$ unde $pn=a^2-b-m^2$, m Є R.

10) Fie A si B Є M $_3$(C) si ε radacina cubica a unitatii , $\varepsilon^3=1$.
Aratati ca $\det(A+B) +\det(A+ \varepsilon B) +\det(A + \varepsilon^2 B) = 3\,(\det A + \det B)$.

Serban George-Florin profesor Braila

Solutie: $p(x)=\det(A+xB)=x^3\det B +ax^2+bx +\det A$
Calculam $p(1)= \det B+a+b+\det A = \det(A+B)$, $p(\varepsilon)= \det(A+\varepsilon B)=\varepsilon^3\det B +a\varepsilon^2+b\varepsilon+\det A$
Si $p(\varepsilon^2)= \det(A+\varepsilon^2 B)=\varepsilon^3\det B +a\varepsilon+b\varepsilon^2+\det A$. Dar $\varepsilon^2 + \varepsilon +1=0$. Se aduna aceste relatii si se obtine ca $\det(A+B) +\det(A+ \varepsilon B) +\det(A + \varepsilon^2 B) = 3\,(\det A + \det B)$.

11) Fie A , B Є M_2 (R) cu $AB=A^2B^2 -(AB)^2$ si det(B)=2 .
a) Aratati ca matricea A nu este inversabila .

b) Calculati det (A+ 2B) – det (B+2A).

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2013

Solutie: a) AB-AABB + ABAB=O_2 , A(AB-BA-I_2)B= O_2 , B este inversabila deci A(AB-BA-I_2) = O_2. Daca matricea A este inversabila atunci AB-BA-I_2 = O_2.
Tr (AB-BA-I_2)= Tr (AB-BA) –Tr (I_2)=0-2=-2 $\neq$0=Tr (O_2) fals.
b) Fie p(x)=det (A+xB)= (det(B))x^2 +ax + det(A)=2x^2+ ax deoarece det(A)=0.
Calculam p(2)= det (A+2B)=8+2a , 4p($\frac{1}{2}$)=det (B+2A)=2+2a.
det (A+ 2B) – det (B+2A)= 8+2a-2-2a=6.

12)Fie A,B Є M_4 (R) cu AB=BA si det (A^2+AB +B^2)=0 . Aratati ca :
det (A+B) +3det(A-B)=6det(A) + 6det(B)

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 2012

Solutie :
det (A^2+AB +B^2)=det(A-εB)(A -$ε^2$B)=det(A-εB)det(A -$ε^2$B)=0
Fie p(x)= det (A+xB)=(detB)x^4 + cx^3 +bx^2 +ax +det A. Avem ca p(ε)=p($ε^2$)=0.
Calculam p(ε)= detA +c + ε(a+ detB) +b$ε^2$=0 , detA +c=a+ detB = b
Calculam p(1)= det (A+B)= detB + c +b +a +detA
Si p(-1)= det (A-B)=detB -c +b -a +det A. Deci 3 p(-1)=3detB-3c+3b-3a+3detA.
Calculez p(1) + 3 p(-1)=4detB+4detA -2a +4b-2c , dar c=b-detA , a=b-detB
Inlocuim si obtinem p(1) + 3 p(-1)= 4detB+4detA -2(b-detB)+4b-2(b-detA)=
=6det(A) + 6det(B) qed.

13) Fie A, B Є M_3(R) cu AB=O_3 .
a) Demonstrati ca functia f:C→C , f(x)=det(A^2+B^2+xBA) este polinomiala de grad cel mul 2.
b) Demonstrati ca det(A^2+B^2)≥0.

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2012

Solutie: f(x)=det(A^2+B^2+xBA)=(det(BA))x^3 +bx^2+ax + det(A^2+B^2) , dar AB=O_3
Deci det (AB)=0=detAdetB , det A=0 sau det B=0 , det (BA)=0.
Atunci f(x)=det(A^2+B^2+xBA)= bx^2+ax + det(A^2+B^2) qed
Calculam f(i)= det (A^2+B^2 +i (BA-AB))=det(A+iB)det(A-iB) .
Si f(-i) = det (A^2+B^2 -i (BA-AB))= det(A-iB)det(A+iB). Deci f(i)= f(-i)
Se obtine –b+ai+ det(A^2+B^2)=-b-ai + det(A^2+B^2) , gasim a=0
Dar f(i)=-b+ det(A^2+B^2) = det(A+iB)det(A-iB)=$|$ det(A+iB)$|^2 \geq 0$ Deci
-b+ det(A^2+B^2) $\geq$ 0 . calculam f(1)=b+ det(A^2+B^2)=det(A^2+B^2 +BA+AB)
Si f(1)=det$(A+B)^2 \geq 0$, deci b+ det(A^2+B^2) $\geq$ 0 . Se aduna cele doua inegalitati si se obtine ca det(A^2+B^2)≥0 qed.

14) Fie A, B Є M_3(C) cu A= - ${}^tA$, B= ${}^tB$, aratati ca daca functia polinomiala f(x)=det(A+xB) are o radacina dubla , atunci det (A+B)=det B. (Prin ${}^tX$ s-a notat transpusa matricei X).

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2010

Solutie: $f(x)= \det(A+xB)=(\det B)x^3+ax^2+bx +\det A$
Calculam $f(x)= \det {}^t(A+xB)= \det(-A+xB)= - \det(A -xB) = - f(-x)$ deci f este functie impara , $(\det B)x^3+ax^2+bx +\det A=(\det B)x^3 -ax^2+bx - \det A$, deci $a=0$, dar $A= - {}^tA$
Calculez $\det(A)= \det(- {}^tA)=- \det(A)$, $\det A=0$, $f(x)=(\det B)x^3++bx$,
$f(x)=x[(\det B)x^2+b]=0$ rezulta ca $x=0$ sau $(\det B)x^2+b=0$
Daca $x=0$ e radacina dubla atunci $f^{|}(0)=b =0$. $f^{|}(x)=3(\det(B))x^2 +b$
Daca $(\det B)x^2+b=0$, $x^2=-b / \det B$ cu radcina x_0 , $f^{|}(x_0)=3(\det(B))x_0^2+b=-2b=0$
Deci $b=0$. Daca $\det B=0$,$f(x)=bx$ nu are radacina dubla decat daca $b=0$.
Obtinem $f(x)=(\det B)x^3$, $f(1)=\det (A+B)=\det B$ qed.

15) Fie $A , B \in M_2 (C)$ doua matrice nenule astfel incat $AB+BA=O_2$ si $\det(A+B)=0$ .Sa se arate ca $Tr (A)=Tr (B)=0$.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2011

Solutie: $(A+B)^2=A^2+B^2 +AB+BA= A^2+B^2$, $(A-B)^2=A^2+B^2 -AB-BA= A^2+B^2$
Deci $\det(A+B)^2=\det (A^2+B^2)=\det (A-B)^2 =0$, $\det (A-B)=0$.
Aplicam teorema lui Cayley pentru matricele A+B si A-B si obtinem
$(A+B)^2- Tr(A+B)(A+B) +\det(A+B)I_2=O_2$, $A^2+B^2 - Tr(A+B)(A+B)= O_2$
$(A-B)^2- Tr(A-B)(A-B) +\det(A-B)I_2=O_2$, $A^2+B^2 - Tr(A-B)(A-B)= O_2$
Se scad cele doua egalitati si se obtine ca $(Tr(A))B=(Tr(B))A$.
Daca $TrA=0$ atunci $TrB=0$ in caz contrar $A=O_2$ fals . Obtinem deci $A=aB$,
Unde $a=TrA / Tr B$, $Tr B\neq0$, $AB+BA=O_2$, $aB^2= O_2$, deci $a=0$, $Tr (A)=Tr (B)=0$ qed.

16) Fie $A \in M_2 (R)$ cu $\det A=d\neq0$, astfel incat $\det (A+dA^*)=0$. Sa se arate ca $\det (A- dA^*)=4$.
Daniel Jinga Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2001

Solutie: Fie matricea $A=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, $A^* =\begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$, $d=mq-np$

Calculam $\det (A+dA^*)=\begin{vmatrix} m+qd & n(1-d) \\ p(1-d) & q+md \end{vmatrix}=d [(d-1)^2 +(m+q)^2]=0$, deci $d=1$ si $m+q=0$

. $TrA=0$, $\det (A- dA^*)= \det (A- A^*)=\begin{vmatrix} m-q & 2n \\ 2p & q-m \end{vmatrix}= -(m+q)^2 +4(mq-np)=4$ qed.

17) Fie $A, B \in M_2 (R)$ astfel incat $\det(AB+BA)\leq0$. Sa se arate ca $\det(A^2+B^2)\geq0$.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 1996

Solutie: Fie $p(x)=\det(A^2+B^2+x(AB+BA))=x^2\det(AB+BA)+ax+\det(A^2+B^2)$
Calculez $p(1)=\det {}^2(A+B)= \det(AB+BA)+a+\det(A^2+B^2) \geq0$
Si $p(-1)= \det {}^2(A-B)= \det(AB+BA) -a+\det(A^2+B^2) \geq0$. Adunam cele doua inegalitati si obtinem ca $2\det(AB+BA) +2\det(A^2+B^2) \geq0$, $\det(A^2+B^2) \geq - \det(AB+BA) \geq0$ qed.

18) Fie $A, B \in M_2 (R)$.
a) Daca $\det (A+iB)=p+qi$, unde $p,q\in R$ atunci $\det (A - iB)=p – qi$.

b) Aratati ca daca det (A+iB)=0 atunci det (A - iB)=0
Concursul National de Matematica Aplicata „Adolf Haimovici „ 2007

Solutie: Fie $p(x)=\det(A+xB)=(\det(B))x^2+ax+\det(A)$
Calculam $p(i)=$ **$\det(A+iB)=$** $-(\det(B))+ai+\det(A)=(\det A-\det B)+ai=$ **$p+qi$**
Si $p(-i)=\det(A-iB)=-(\det(B))-ai+\det(A)=(\det A-\det B)-ai=p-qi$
Unde $p=\det A-\det B$ si $q=a$. Daca $\det(A+iB)=0=p+qi$ rezulta ca $p=q=0$
Deci $\det(A-iB)=p-qi=0-0i=0$ qed.

19) Fie n Є N , n≥3 . Sa se determine X Є M_2 (R) astfel incat
$$X^n+X^{n-2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 1994

Solutie : $X^{n-2}(X^2+I_2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ .Trec la determinant si obtin ca $\det X=0$ sau

$\det(X^2+I_2)=0$ adica $\det(X+iI_2)\det(X-iI_2)=0$, $p(x)=\det(A-xI_2)=x^2-(\mathrm{Tr}A)x+\det A$
Rezulta ca $p(i)=p(-i)=0$, $p(i)=-1-(\mathrm{Tr}A)i+\det A=0$ rezulta ca $\mathrm{Tr}A=0$ sau $\det A=1$
Adica in cazul nostru $\mathrm{Tr}\,X=0$ si $\det X=1$. Daca $\mathrm{Tr}\,X=0$ si $\det X=1$, stim ca
$X^2-(\mathrm{Tr}X)X+(\det X)I_2=O_2$, deci $X^2+I_2=O_2$ si inlocuim in relatia
$X^{n-2}(X^2+I_2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ si obtinem ca $O_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ fals.
Deci $\det X=0$, $X^2=(\mathrm{Tr}X)X$, $X^3=(\mathrm{Tr}X)^2X$ se arata prin inductie ca $X^n=(\mathrm{Tr}X)^{n-1}X$
Notez $\mathrm{Tr}(X)=a$, inlocuim in relatia data si obtinem
$(\mathrm{Tr}X)^{n-1}X+(\mathrm{Tr}X)^{n-3}X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $(a^{n-1}+a^{n-3})X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $a\neq0$.

Fie $X=\begin{pmatrix}b & c\\ d & e\end{pmatrix}$ .Se obtine ca : $(a^{n-1}+a^{n-3})b=1$, $(a^{n-1}+a^{n-3})c=-1$, $(a^{n-1}+a^{n-3})d=-1$ si
$(a^{n-1}+a^{n-3})e=1$, se aduna prima si ultima egalitate si obtinem ca $(a^{n-1}+a^{n-3})(b+e)=2$
adica $(a^{n-1}+a^{n-3})a=2$, $a^n+a^{n-2}=2$. Se obtine usor ca $a=1$ pentru orice n Є N , n≥3.
Daca n=par atunci a poate fi a=-1. Daca a=1 atunci $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Daca n=par , a=-1 obtinem ca $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

20) Fie A, B Є M_n (C) cu AB=BA si det B ≠ 0 . Aratati ca daca | det(A+zB) | =1 pentru orice z Є C cu |z|=1 atunci $A^n=O_n$.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 2009

Solutie: Fie $p(z)=\det(A+zB)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$, $a_n=\det B\neq0$ .Obtinem ca $p(z)\overline{p(z)}=1$
Gasim ca $a_{n-1}=\ldots=a_1=a_0=0$ si $a_n\overline{a}_n=1$, $|a_n|=|\det B|=1$, $p(z)=a_nz^n$, $\det(A+zB)=(\det B)z^n$,
$\det[B(B^{-1}A+zI_n)]=(\det B)z^n$, $\det B\det(B^{-1}A+zI_n)=(\det B)z^n$, $\det(B^{-1}A+zI_n)=z^n$,
$q(z)=z^n$ este polinomul caracteristic al matricei $-B^{-1}A$. Aplic teorema lui Cayley-Hamilton si obtin ca

$(-B^{-1}A)^n = O_n$, $B^{-1}A = AB^{-1}$ (reiese din AB=BA) . $(B^{-1})^n A^n = O_n$ inmultesc cu B^n si gasesc ca $A^n = O_n$ qed.

21) Fie $A \in M_2(C)$ cu $A^2 = O_2$ si $C(A)=\{ B \in M_2(C) \mid AB=BA \}$. Aratati ca $|\det(A+B)| \geq |\det B|$, $\forall$ $B \in C(A)$.

Olimpiada Nationala de Matematica Faza Nationala 1999

Solutie: $A^2 = O_2$, detA=0 , , Tr A=0. Daca det B=0 rezulta ca $|\det(A+B)| \geq |\det B| = 0$ (A). Presupun ca $\det B \neq 0$ si obtinem ca
$|\det B^{-1} \det(A+B)| \geq 1$, $|\det(B^{-1}A + I_2)| \geq 1$, $p(x) = \det(B^{-1}A - xI_2)$,
Deci $p(x) = x^2 - (Tr(B^{-1}A))x + \det(B^{-1}A)$, $p(-1) = 1 + Tr(B^{-1}A) = \det(B^{-1}A + I_2)$

Dar $(B^{-1}A)^2 - (Tr(B^{-1}A))(B^{-1}A) + (\det(B^{-1}A))I_2 = O_2$, dar $B^{-1}A = AB^{-1}$ (reiese din AB=BA) , $(B^{-1}A)^2 = B^{-1}AB^{-1}A = B^{-1}B^{-1}AA = O_2$. Deci $Tr(B^{-1}A) = 0$ (daca $A = O_2$ rezulta usor inegalitatea ceruta $|\det B| \geq |\det B|$).
Rezulta ca $|p(-1)| = |\det(B^{-1}A + I_2)| = |1 + Tr(B^{-1}A)| = 1 \geq 1$ qed. .

22) a) Fie $X \in M_2(C)$ **. Aratati ca $\det(X+I_2) = \det(X - I_2) \Leftrightarrow Tr\,X = 0$**
b) Daca $A \in M_2(C)$ astfel incat $\det(A+I_2) = \det(A - I_2)$ si $\det(A^{2008} + I_2) = \det(A^{2008} - I_2)$, aratati ca $A^2 = O_2$.

Concursul National de Matematica Aplicata „Adolf Haimovici” 2008

Solutie: Fie $p(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (Tr\,A)x + (\det A)$
$\det(X+I_2) = p(-1) = 1 + TrX + \det X = \det(X - I_2) = p(1) = 1 - TrX + \det X \Leftrightarrow Tr\,X = 0$. b)
$\det(A+I_2) = \det(A - I_2)$, Tr A=0 , $A^2 - (TrA)A + (\det A)I_2 = O_2$
$A^2 = (-\det(A))I_2$. Se gaseste ca $A^{2008} = (-\det(A))^{1004} I_2$
Dar $\det(A^{2008} + I_2) = \det(A^{2008} - I_2)$, $Tr\,A^{2008} = 0$, $Tr\,A^{2008} = 2(-\det(A))^{1004} = 0$
Deci det A=0 , rezulta ca $A^2 = O_2$ qed.

23) Se considera matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ si $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)Rezolvati in R ecuatia $\det(A - xI_2) = 0$.
b)Determinati valorile parametrilor reali m si n daca $A^3 = mA + nI_2$.
c)Demonstrati ca $A^{2013} + A^{2012} = 2^{2012}(A + I_2)$.

Concursul National de Matematica Aplicata „Adolf Haimovici” 2013

Solutie: $p(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (Tr\,A)x + (\det A) = x^2 - x - 2$, $x^2 - x - 2 = 0$ se gaseste $x \in \{-1, 2\}$. Dar $A^2 - (TrA)A + (\det A)I_2 = O_2$, $A^2 - A - 2I_2 = O_2$, $A^2 = A + 2I_2$, inmultim cu A si obtinem $A^3 = A^2 + 2A = A + 2I_2 + 2A = 3A + 2I_2 = mA + nI_2$,se gaseste m=3 si n=2.
$A^2 + A = 2(A + I_2)$, $A^3 + A^2 = 3A + 2I_2 + A + 2I_2 = 4(A + I_2)$.......
Vom demonstra prin metoda inductiei matematice ca :
$P(n) : A^{n+1} + A^n = 2^n(A + I_2)$, $\forall$ $n \in N^*$. Pentru n=1 , am aratat $A^2 + A = 2(A + I_2)$
Presupun ca P(n) este adevarata si arat ca P(n+1) este adevarata.
$P(n+1)$: $A^{n+2} + A^{n+1} = 2^{n+1}(A + I_2)$, $A^{n+2} + A^{n+1} = A(A^{n+1} + A^n) = 2^n(A + I_2)A = 2^n(A^2 + A) = 2^n 2(A + I_2) = 2^{n+1}(A + I_2)$ adevarat . Deci P(n) (A) $\forall$ $n \in N^*$.

Dam lui n valoarea 2012 si obtinem $A^{2013}+A^{2012}=2^{2012}(A+I_2)$ qed.

24) Fie matricea $A \in M_n(R)$. Daca $A^t A=I_n$, aratati ca :
a) $|Tr\ A| \le n$. b) Pentru n inpar avem $\det(A^2 - I_n)=0$.
Olimpiada Nationala de Matematica Faza Judeteana 2007.

Solutie : a) Fie $\lambda \in C$ o radacina a polinomului $p(x)=\det(A-xI_2)$. Sistemul $AX=\lambda X$ cu X matrice coloana complexa , are solutie nebanala . Transpunem si conjugam relatia $AX=\lambda X$, ${}^t\overline{X}\ {}^t\overline{A}=\overline{\lambda}\ {}^t\overline{X}$ si apoi inmultim relatiile si obtinem ca ${}^t\overline{X}\ {}^tA\ AX=|\lambda|^2\ {}^t\overline{X}\ X$. Dar ${}^t\overline{X}\ X>0$ rezulta ca $|\lambda|^2=1$ deci $|\lambda|=1$. Dar $Tr\ A=\sum\lambda$ (suma dupa toate cele n valori proprii) . Aplicam inegaliatea modulului si obtinem ca $|Tr\ A|=|\sum\lambda|\le 1+1+....+1=n$. b) Polinomul caracteristic matricei A este $p(x)=\det(A-xI_2)$ are grad n impar deci are cel putin o radacina reala adica 1 sau -1. Adica $p(1)=\det(A-I_n)=0$ sau $p(-1)=\det(A+I_n)=0$ .Dar $\det(A^2-I_n)=\det(A-I_n)\det(A+I_n)=0$ qed.

Bibliografie : - Subiecte date la olimpidele de matematica .
- „Algebra” Ion D Ion si R Nicolae

---

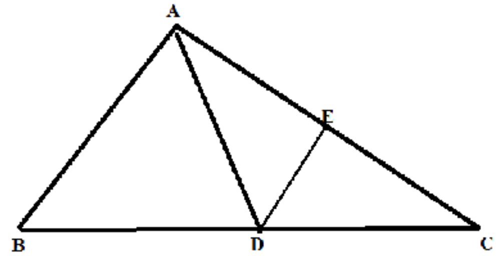
5. PROBLEME INTERESANTE PENTRU GIMNAZIU ŞI LICEU

Prof.Chiriță Marcel,București

1. (Clasa a VII a)

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m(\sphericalangle A)=3m(\sphericalangle C)$ si BC= $\sqrt{3}$AB. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

Soluție. Notăm cu $\alpha=m(\sphericalangle C)$ atunci $m(\sphericalangle A)=3\alpha$ și cu AB = 1 atunci BC = $\sqrt{3}$.



Fie D $\in$ (BC) astfel ca $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle DCA) = \alpha$. Notăm cu x = AD = DC deoarece ΔADC este isoscel.
Deoarece $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BDA) = 2\alpha$ avem AB = BD = 1
Din relația lui Stewart avem

$$AB^2\cdot DC - AD^2\cdot BC + AC^2\cdot BD = BC\cdot BD\cdot DC$$ obținem

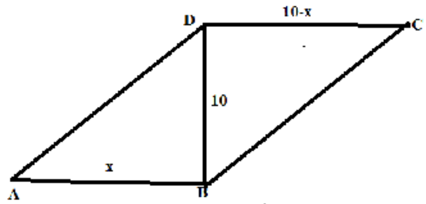
$x - x^2(x+1) + 3 = x(x+1) \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+3x+3) = 0 \Rightarrow x+1$
Rezultă că triunghiul ABD este echilateral $\Rightarrow 3\alpha = 60^o \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90^o$, $m(\sphericalangle B) = 60^o$ și $m(\sphericalangle C) = 30^o$.

2. (Clasa a VIIa și VIII a)

Fie ABCD un patrulater convex de arie 50,în care AB+BD+DC = 20.Să se determine lungimile laturilor patrulaterului știind că perimetrul său este minim.

Soluție.

$S[ABCD] = 50 = \frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin(\sphericalangle ABD) + \frac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin(\sphericalangle BDC) \leq \frac{1}{2}AB\cdot BD + \frac{1}{2}BD\cdot CD$
Cu egalitate dacă și numai dacă $\sin(\sphericalangle ABD) = \sin(\sphericalangle BDC) = 1$,adică AB $\perp$ BD și CD $\perp$ BD.



Deci $100 \leq BD(AB+CD) = BD(20 - BD) \Leftrightarrow BD^2 - 20BD + 100 \leq 0 \Leftrightarrow (BD - 10)^2 \leq 0$ $\Rightarrow$
BD = 10 și $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle BDC) = 90^o$ de unde rezultă că AB+CD = 10.Prin urmare segmentul BD este de lungime fixă egală co 10 iar semidreptele (BA și (DC sunt perpendiculare pe BD respectiv în B și D.
Fie AB = x ,atunci CD = 10−x. Avem $AD^2 = BD^2 + AB^2 = 100 + x^2$, $BC^2 = BD^2 + DC^2 =$
$100 + (10-x)^2$. Rezultă că perimetrul patrulaterului este
$P = x + 10 - x + \sqrt{x^2+100} + \sqrt{100+(10-x)^2} \Leftrightarrow P = 10 + \sqrt{x^2+100} + \sqrt{x^2-20x+200}$
Vom arăta că pentru $x \in [0,10]$
$10 + \sqrt{x^2+100} + \sqrt{x^2-20x+200} \geq 10 + 10\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-20x+200} \geq 10\sqrt{5} - \sqrt{x^2+100}$
$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 200 \geq 500 - 20\sqrt{5(x^2+100)} + x^2 + 100 \Leftrightarrow 20\sqrt{5(x^2+100)} \geq 400 + 20x$
$\Leftrightarrow \sqrt{5(x^2+100)} \geq 20 + x \Leftrightarrow 5(x^2+100) \geq 400 + 40x + x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 40x\ 100 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$.
Deci perimetrul P minim este $10 + 10\sqrt{5}$ și se obține pentru x = 5.

Prin urmare patrulaterul care satisface cerințele enunțului este paralelogramul ABCD cu AB = CD = 5 și AD = BC = $5\sqrt{5}$.

3. (Clasa a IX a)

Fie x,y,z numere reale pozitive cu $x + y + z = 1$ și $a \geq 1$. Să se arate:

$$\frac{27}{9a^2-1} \leq \sum \frac{1}{a^2-x^2} \leq \frac{3a^2-2}{a^2(a^2-1)}$$

Soluție. Avem $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\sum\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$.

Din inegalitatea lui Cauchy obținem pe rând:

$\sum \frac{1}{a+x} \cdot \sum(a+x) \geq 9 \Rightarrow \sum \frac{1}{a+x} \geq \frac{9}{\sum(a+x)} = \frac{9}{3a+1} \Rightarrow \sum \frac{1}{a+x} \geq \frac{9}{3a+1}$ și

$\sum \frac{1}{a-x} \cdot \sum(a-x) \geq 9 \Rightarrow \sum \frac{1}{a-x} \geq \frac{9}{\sum(a-x)} = \frac{9}{3a-1} \Rightarrow \sum \frac{1}{a-x} \geq \frac{9}{3a-1}$.

Rezultă $\sum \frac{1}{a^2-x^2} \geq \frac{1}{2a}\left(\frac{9}{3a+1} + \frac{9}{3a-1}\right) = \frac{27}{9a^2-1}$

Egalitatea se obține pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Pe de altă parte avem:

$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a+1}\left(1 + \frac{1-x}{a+x}\right) \leq \frac{1}{a+1}\left(1 + \frac{1-x}{a}\right) = \frac{1}{a+1}\left(\frac{a+1-x}{a+x}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{a+x} \leq \sum \frac{1}{a+1}\left(\frac{a+1-x}{a+x}\right) = \frac{3a+2}{a(a+1)}$ și

$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-1}\left(1 + \frac{x-1}{a-x}\right) \leq \frac{1}{a-1}\left(1 + \frac{x-1}{a}\right) = \frac{1}{a-1}\left(\frac{a-1+x}{a}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{a-x} \leq \sum \frac{1}{a-1}\left(\frac{a-1+x}{a}\right) = \frac{3a-2}{a(a-1)}$.

Rezultă: $\sum \frac{1}{a^2-x^2} \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{3a+2}{a(a+1)} + \frac{3a-2}{a(a-1)}\right) = \frac{3a^2-2}{a^2(a^2-1)}$.

Egalitatea se obține pentru $x = 1, y = z = 0$ sau $y = 1, x = z = 0$ sau $z = 1, x = y = 0$.

4. (Clasa a X a)

În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) \geq \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $tgB\, tgC \leq ctg^2\left(\frac{A}{2}\right)$.

Soluție. Funcția $f(x) = tgx$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ este convexă $\Longrightarrow tg\left(\frac{B+C}{2}\right) \leq \frac{tgB+tgC}{2}$. (1)

Dacă notăm $x = \frac{B+C}{2}$ avem $tg\, 2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x} \Longrightarrow tg(B+C) = \frac{2tgx}{1-tg^2x} \Longrightarrow$

$\frac{tgB+tgC}{1-tgBtgC} = \frac{2tgx}{1-tg^2x} \Longrightarrow tg\, x = \frac{(tgB+tgC)(1-tg^2x)}{2(1-tgBtgC)} \Longleftrightarrow tg\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{(tgB+tgC)(1-tg^2x)}{2(1-tgBtgC)}$ (2)

Din (1) și (2) avem $\frac{(tgB+tgC)(1-tg^2x)}{2(1-tgBtgC)} \leq \frac{tgB+tgC}{2} \Longrightarrow 1 - tg^2x \leq 1 - tgBtgC \Longleftrightarrow$

$tgBtgC \geq tg^2x \Longleftrightarrow tgBtgC \geq tg^2\left(\frac{B+C}{2}\right) \Longleftrightarrow tgB\, tgC \leq ctg^2\left(\frac{A}{2}\right)$.

Egalitatea e3ste pentru $A = \frac{\pi}{2}$, $B = C = \frac{\pi}{4}$.

5. (Clasa a XI a)

Fie f: $[0,1] \rightarrow$ R o funcție de două ori derivabilă.

a) **Dacă pentru orice $x_0 \in R$ cel puțin dintre $f''(x_0+0)$ și $f''(x_0-0)$ este pozitivă și funcția este mărginită superior atunci ea este constantă.**
b) **Dacă pentru orice $x_0 \in R$ cel puțin dintre $f''(x_0+0)$ și $f''(x_0-0)$ este negativă și funcția este mărginită inferior atunci ea este constantă.**

Soluție. a)Fie $\varepsilon > 0$ ales arbitrar și să considerăm funcția $g:R\to R$ definită prin $g(x) = f'(x) + \varepsilon x$
Pentru orice $x \in R$. Atunci g admite în orice punct o derivată laterală care este strict pozitivă ,deci g este strict crescătoare.Atunci pentru orice $x,y \in R$ $x < y$ avem $f'(x) + \varepsilon x < f'(y) + \varepsilon y$ adică$f'(y) - f'(x) + \varepsilon(y - x) > 0$ și cum ε a fost arbitrar reiese că $f'(x) \leq f'(y)$, decif' estecrescătoare.
Săpresupunemacumcă existăx$_0 \in$I cu $f'(x_0) \neq 0$.
Fie $f'(x_0) > 0$. Atuncipentru $x > x_0$ avem $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ de unde obținem
$f(x) > f'(x_0)(x - x_0)$. trecând la limită pentru $x \to \infty$ obținem $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$ contradicție deoarece funcția este mărginită.
Fie $f'(x_0) < 0$. Atuncipentru $x < x_0$ avem $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$ de unde obținem $f(x) > f'(x_0)(x - x_0)$. trecând la limită pentru $x \to \infty$ obținem $\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$ contradicție deoarece funcția este mărginită.
Deci $f'(x_0) = 0$,$\forall x \in R$ de unde rezultă f este constantă.
Pentru b) considerăm funcția $h(x) = -f(x)$.

6. **(Clasa a XII a)**

Fie $f,g:[0,1] \to R$, f continuă pe $[0,1]$ și g integrabilă. Dacă $\int_x^1 f(x)dx \geq g(x)$ $\forall x \in [0,1]$ atunci $3\int_0^1 f^2(x)dx \geq 6\int_0^1 g(x)dx - 1$.

Soluție. Fie F primitiva lui f pe $[0,1]$.Atunci
$\int_x^1 f(x)dx \geq g(x)$ $\forall x \in [0,1] \Leftrightarrow F(1) - F(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [0,1] \Rightarrow$
$\int_0^1 (F(1) - F(x))dx \geq \int_0^1 g(x)dx$. Notăm cu $k = \int_0^1 g(x)dx$. (1)
Avem $\int_0^1 (xF(x))'dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx \Rightarrow F(1) - \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx \Rightarrow$
$\int_0^1 (F(1) - F(x))dx = \int_0^1 xf(x)dx$ (2)
Din (1) și (2) rezultă $\int_0^1 (F(1) - F(x))dx = \int_0^1 xf(x)dx \geq k$ (3)
Deoarece $(f(x) - x)^2 \geq 0$ $\forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f^2(x) \geq 2xf(x) - x^2$ $\forall x \in [0,1]$ rezultă că $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 x^2dx$ și ținând cont de (3) obținem
$3\int_0^1 f^2(x)dx \geq 6\int_0^1 g(x)dx - 1$.