MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro
- Revistă LUNARĂ -

SEPTEMBRIE 2013
ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre
E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

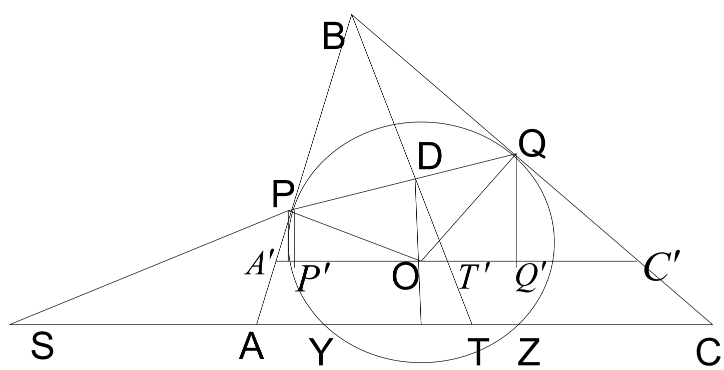
1. Solutions to Problem 205 and Problem 208 from La Gaceta de la RSME, Vol. 15 (2012), No. 3 Other than those presented in La Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), No. 3

by Roxana Mihaela Stanciu[1] and Nela Ciceu[2]

PROBLEMA 205. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el plano, los puntos A, Y, Z y C son fijos, distintos y están alineados en ese orden. Sea π uno de los dos semiplanos definidos por la recta AC. Sea γ una circunferencia que pasa por los puntos Y y Z. Las rectas AP y CQ, donde $P, Q \in \gamma \cap \pi$, son tangentes a γ y se cortan en el punto B. Sea D el punto de intersección de la recta PQ con la mediatriz del segmento YZ. Demostrar que, al variar γ en la familia de circunferencias que pasan por los puntos Y y Z, la recta PQ siempre pasa por un cierto punto fijo y la recta BD siempre pasa por otro cierto punto fijo.

Solution:



If $AY = ZC$, then triangle ABC is isosceles and $PQ \parallel AC$, so we suppose that $AY \neq ZC$. Let $S = PQ \cap AC$ with $A \in (SC)$. With power of the point with respect to a circle we have that:

[1] Liceul cu Program Sportiv ''Iolanda Balas Soter'', Buzău
[2] Roșiori, Bacău

$$AP^2 = AY \cdot AZ$$

and

$$CQ^2 = CZ \cdot CY.$$

We apply Menelaus's theorem for triangle ABC and transversal $S-P-Q$, and taking account that $BQ = BP$ we deduce that:

$$\frac{SA}{SC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{PB}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{PA}{CQ} \Rightarrow \frac{SA}{SC} = \sqrt{\frac{AY \cdot AZ}{CZ \cdot CY}},$$

so the point S is fixed.

Let O the center of a circle γ. The parallel through O to AC intersects the lines BA, BD and BC in the points A', C' and respectively C'.

Denote: $P' = \Pr_{A'C'} P$, $Q' = \Pr_{A'C'} Q$ and $T = AC \cap BD$.

By the cathetus's theorem in triangles $A'OP$ and $C'OQ$ we have that:

$$P'O = \frac{PO^2}{A'O}; OQ' = \frac{OQ^2}{C'O},$$

but BO is bisector in triangle $BA'C'$, so

$$\frac{OA'}{OC'} = \frac{BA'}{BC'},$$

and we obtain:

$$\frac{OP'}{OQ'} = \frac{PO^2}{A'O} \cdot \frac{C'O}{OQ^2} = \frac{C'O}{A'O} = \frac{BC'}{BA'}.$$

Since $PP' \| DO \| QQ'$ we have that:

$$\frac{DP}{DQ} = \frac{OP'}{OQ'}, \text{ i.e. } \frac{DP}{DQ} = \frac{BC'}{BA'}.$$

We apply the relation (R_1) from the journal Recreaţii Matematice, No. 1/2005, p.15 for triangle $A'BC'$ with the cevian BT' and the secant PQ, yields:

$$\frac{BP}{BA'} \cdot \frac{A'T}{TC'} \cdot \frac{BC'}{BQ} \cdot \frac{DQ}{DP} = 1 \Leftrightarrow \frac{A'T}{TC'} = \frac{DP}{DQ} \cdot \frac{BA'}{BC'},$$

and because:

$$\frac{DP}{DQ} = \frac{BC'}{BA'},$$

we deduce that:

$$A'T = TC'.$$

Therefore T' is the middle of the segment $A'C'$.

Using similarity we easily obtain that T is the middle of AC.

Remark. If instead of the parallel through O to AC we had considered the parallel to AC whict tangent to γ, then γ would become inscribed in a triangle.The result proved above is the following problem from the R. Moldova Olympiad:

''The sides AB, BC, AC of triangle ABC are tangent to the incircle of center I in the points C_1, A_1, B_1 .If B_2 is the middle of AC prove that the lines B_1I, A_1C_1 and BB_2 are concurrent.''

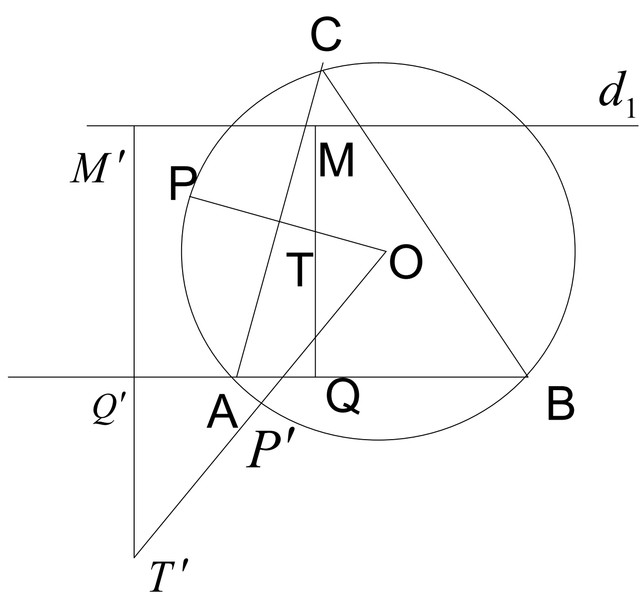
PROBLEMA 208. *Propuesto por Ricardo Barroso Campos, Universidad de Sevilla, Sevilla.*

Sea ABC un triángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Denotaremos por Δ_1, Δ_2 y Δ_3, respectivamente, el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a Γ y a cada una de las rectas AB, AC y BC.

a) Determinar Δ_1, Δ_2 y Δ_3.

b) Si U es el punto de intersección de Δ_1 y Δ_2, V es el punto de intersección de Δ_2 y Δ_3 y W es el punto de intersección de Δ_3 y Δ_1, probar que las rectas AU, BV y CW son concurrentes.

Solution:



a) We consider the tangent circles to AB and interior tangent to Γ such that the tangent point with Γ to be at the same side of the line AB like the point C .Also we consider the circles tangent to AB and exterior tangent to Γ such that the tangent point with Γ to be the other side of the line AB from the point C .We denote with O the centre of the circle Γ and with R its radius.The same side with C we construct the parallel d_1 at AB such that $d(d_1, AB) = R$ .Let T (respectively T') the center of tangent circle at AB in the point Q (respectively Q') and interior tangent at Γ in the point P (respectively exterior tanget at Γ in the point P').

We denote: $M = TQ \cap d_1, M' = T'Q' \cap d_1$.

We have:

$$TO = PO - TP = R - TQ = MQ - TQ = TM;$$
$$T'O = P'O + T'P' = R + T'Q' = M'Q' + T'Q' = T'M',$$

i.e. the points T and T' are each at equal distance to the fixed point O and from the fixed line d_1. We obtain that Δ_1 is a parable (which pass through the points A and B) with focus O and the director line d_1.

b) The point U is the center of a tangent circle at AB and at Γ and also the center of a tangent circle at AC and at Γ. Hence U is the center of a circle which is tangent simultaneously at AB, AC and at Γ, therefore the point U is on the bisector of the angles A. Analogously V is on the bisector of angles B and W is on the bisector of the angles C. Follows immediately the concurrency of the lines AU, BV and CW.

2. DERIVABILITAE ŞI INTEGRABILITATE
exemple şi contraexemple

prof. Aurora Olivia Mironescu
Colegiul de Industrie Alimentară „Elena Doamna”-Galaţi

Foarte importante, în procesul didactic, de predare-învăţare, sunt exemplele. Acestea le oferă elevilor posibilitatea de a-şi consolida cunoştinţele teoretice, dar, mai ales, justifică studiul noţiunilor prin ilustrarea aplicabilităţii practice a acestora. La fel de importante sunt şi contraexemplele.Primele, exemplele ilustrative, arată de ce o afirmaţie are sens, celelalte- de ce o afirmaţie nu are sens.

Exemplul 1. Orice funcţie derivabilă este continuă. Reciproc este fals. Cel mai cunoscut exemplu este funcţia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = $|x|$. Aceasta nu este derivabilă, dar are derivate laterale. Funcţia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

f(x) = $\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ este continuă, nu este derivabilă în x= 0, nici nu are derivate laterale în acest punct. Există, în schimb, funcţii care sunt discontinue, dar au derivată într-un punct: f(x)= sgn x, cu $f'(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ \infty, x = 0 \end{cases}$

Exemplul 2. O funcţie derivabilă,care nu satisface teorema de medie (Lagrange) ([3], pag. 79)

Se consideră funcţia cu valori complexe f(x) = cosx + isinx; este peste tot continuă şi derivabilă, dar nu există a, b şi c astfel ca $a < c < b$ şi (cosb + isinb) – (cosa + isina) = (-sinc + isinc)(b-a). Dacă egalitatea de mai sus ar putea fi satisfăcută, să egalăm pătratele modulelor ale celor doi termeni:

$(\cos b- \cos a)^2 + (\sin b- \sin a)^2 = (b- a)^2$. De aici rezultă că $\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$. Deoarece nu există niciun număr x astfel încât sinx =x, am s-a ajuns la o contradicţie.

Ce legătură există între funcţiile integrabile (în sens Riemann) şi cele care admit primitive?

Exemplul 3. (funcţie care admite primitive, dar nu este integrabilă Riemann) f: $[-1,1] \to \mathbb{R}$, f(x) $= \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, este o funcţie nemărginită, deci nu este integrabilă Riemann. Se observă că funcţia F (x) = $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este derivabilă şi F' = f, adică f admite primitive.

Exemplul 4. (funcţie integrabilă Riemann, dar care nu admite primitive) ([1], pag.66)

f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, numere reale, f(x) = 1

g: $[a,b] \to \mathbb{R}$, g(x) = $\begin{cases} 1, dacă\ x \neq \frac{a+b}{2} \\ -1, dacă\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$; Funcţia f este integrabilă, iar funcţia g se obţine din f, modificând-o pe aceasta într-un singur punct. Deci şi funcţia g este integrabilă, dar imaginea ei nu este interval $\Rightarrow$ că g nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow$nu admite primitive.

Exemplul 5. Funcţia lui Dirichlet este o funcţie mărginită care nu este integrabilă (dem. [1] pag.60)

f : [0, 1] $\to \mathbb{R}$, f (x)= $\begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exemplul 6. Dacă f (x) = 0, f integrabilă pe intervalul $[a,b]$ $,atunci \int_a^b f(x)dx$ =0. Reciproca nu este adevărată. Exemplu, orice funcţie impară pe un interval de forma [-a, a]

Exemplul 7. Se ştie : Dacă f: [a, b] $\to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pozitivă (f(x) $\geq$ 0, $(\forall)x \in [a,b]$), atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Reciproca acestei afirmaţii este falsă.Justificarea o dă următorul exemplu:

f: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, f(x) = $\frac{1-x}{(1+x)^3}$ este continuă, deci integrabilă, iar pentru $(\forall)x > 1$ avem f(x) < 0. Totuşi $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$.

Exemplul 8. Este adevărată Teorema: Orice funcţie continuă f: [a, b] $\to \mathbb{R}$ este integrabilă. Reciproca este falsă. Contraexemplu: f(x) = [x] pe [0, 2].

Exemplul 9. Se demonstrează afirmaţia: O funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux.. Reciproca este falsă. Funcţia f(x) = $\begin{cases} \cos^2\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux, dar nu admite primitive.

Exemplul 10. Există funcţii integrabile, care nu admit primitive.Funcţia lui Riemann definită pe

[a, b], a>0, f(x) = $\begin{cases} 0, x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, x \in [a,b], x = \frac{p}{q}, p,q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1 \end{cases}$

Mulţimea punctelor de discontinuitate ale acestei funcţii (mărginite), fiind numărabilă, este de măsură nulă; deci, conform teoremei fundamentale ale lui Lebesgue, f este integrabilă.Având însă în fiecare punct raţional o discontinuitate de primă speţă, f nu admite primitive ([2], pag. 181)

Exemplul 11. Funcţie care admite primitivă, dar nu este integrabilă (este suficient să fie nemărginită) ([2], pag.182)

f(x) = $\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, 0 < x \le 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ este derivata funcţiei F(x) = $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, 0 < x \le 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Dar f nu este integrabilă, pentru că este nemărginită în vecinătatea originii (pentru $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$).

Exemplul 12. Orice funcţie continuă admite primitive şi este şi integrabilă. Există însă funcţii discontinue, care admit primitive şi sunt şi integrabile? Iată un astfel de exemplu ([2], pag. 181)

f(x) = $\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, 0 < x \le 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ este derivata funcţiei F(x) = $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, 0 < x \le 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, deci admite primitive. Este şi integrabilă, fiind continuă pe [x, 1] $(\forall) x > 0$ din [0, 1], dar este discontinuă în 0.

Există multe astfel de exemple şi contraexemple interesante; unele se pot discuta la clasă, altele, doar cu elevii talentaţi la matematică

BIBLIOGRAFIE

[1] Nicu Boboc, Ion Colojoară, Matematică, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, R. A. Bucureşti,1998;

[2] Oliver Konnerth,Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice,Editura Dacia,Cluj-Napoca, 1982;

[3] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, Contraexemple în analiză, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

3. Matematica – factor intelectual al civilizației

Prof. Nastasă Oana
Liceul Tehnologic "Nicolae Bălăuță"
Localitatea: Şcheia
Județul: Iași

Civilizația, privită în ansamblu, nu este decât o creație a culturii, devenită posibilă şi stimulată de ordinea socială. I se pot distinge patru elemente esențiale: spiritul de prevedere aplicat în economie, organizarea politică, tradițiile morale şi avântul cunoaşterii şi al dezvoltării artistice. Ea nu se poate naşte decât acolo unde sfârşeşte haosul şi nesiguranța, întrucât doar atunci când dispare teama, curiozitatea şi nevoia de creație pot înflori, iar omul îşi poate asculta instinctul care-l împinge, în mod natural, să se instruiască şi să-şi înfrumusețeze viața.

Civilizația depinde de factori diverşi, care fie o însuflețesc, fie îi încetinesc evoluția. Ştiința este un factor intelectual al civilizației.

Herbert Spencer, care s-a remarcat adunând dovezi, considera că preoții au fost cei dintâi savanți, după cum tot ei au fost şi cei dintâi literați; ştiința ar fi început cu observațiile astronomice şi ar fi servit la stabilirea datelor sărbătorilor religioase; secretele s-ar fi păstrat, pesemne în temple, iar generațiile şi le transmiteau ca pe o parte a patrimoniului clerului. Nu se ştie dacă această părere este întemeiată, fiindcă şi la acest capitol, în fața tainelor originilor, suntem siliți să ne rezumăm doar la ipoteze. Poate că ştiința, ca şi civilizația în general a apărut odata cu agricultura; geometria, cum o arată şi numele, înseamnă măsurarea solului; în acelaşi mod, din necesitatea de a calcula începutul recoltelor şi întoarcerile repetitive ale anotimpurilor, prin observarea traiectoriei stelelor pe cer şi stabilirea unui calendar, s-a născut, poate, şi astronomia. Navigația a ajutat-o să progreseze, comerțul a dezvoltat matematica, iar meşteşugurile au pus bazele fizicii şi chimiei.

Socotitul este, fără îndoială, una din cele mai vechi forme ale limbajului şi, la multe populații primitive, operațiunea aceasta este de o fermecătoare simplitate. Tazmanienii numărau astfel până la doi: "parmery, caladawa, cardia" – adică "unu, doi, mulți"; guaranii din Brazilia se avântau ceva mai departe, ajungând să spună: "unu, doi, trei, patru, nenumărați”. Locuitorii din Noua Olandă nu aveau cuvinte nici pentru trei, nici pentru patru: pentru trei spuneau “doi-unu”, iar pentru patru, “doi-doi”. Damaraşii nu ar fi schimbat niciodată două oi pentru patru toiege; preferau să facă de două ori operațiunea şi să schimbe, de fiecare dată, o oaie pe două toiege. Se număra pe degete, de unde şi sistemul zecimal. Atunci când, după o bună bucată de timp, fireşte, s-a ajuns la conceperea numărului doisprezece, acesta le-a plăcut de îndată, pentru că era divizibil cu cinci din primele şase numere; astfel s-a inventat sistemul duodecimal, care se bucură încă de atâta popularitate în Anglia: douăsprezece luni ale anului, doisprezece pence într-un shilling, douăsprezece unități într-o duzină, douăsprezece duzini într-un gros, douăsprezece degete într-un picior. Treisprezece, dinpotrivă, dovedindu-se indivizibil, a fost întâmpinat cu ostilitate şi a trecut drept purtător de ghinion. Degetele de la picioare adăugate celor de la mâini au condus la ideea de douăzeci: acest număr se poate regăsi în alcătuirea numărului quatre-vingts din limba franceză (optzeci, literal “patru-douăzeci”), folosit în locul lui octante.

Şi alte părți ale corpului au servit drept etalon de măsură: o mână pentru a exprima cantitatea dintr-o “ poală”; apoi un deget, un cot, un braț, un picior. Foarte curând, desigur, pentru a număra oamenii au adăugat pe lângă degete, pietricele. Supraviețuirea cuvantului *abacus* şi a “pietricelei” (*calculus*), care se găseşte în cuvântul (a) *calcula*, ne arată cât este de scurt, în realitate, intervalul ce-l separă pe omul primitiv de omul foarte modern. Thoreau ofta după această simplitate a primelor epoci şi a exprimat foarte nimerit acest sentiment atât de des întâlnit: “Un om cumsecade trebuie, în cea mai mare parte a cazurilor, să se mulțumească doar cu cele zece degete ale sale ca să-şi facă socotelile; în ultimă instanță, poate conta şi pe degetele de la picioare şi cu asta basta. Ar trebui să ne socotim afacerile prin doi şi trei, şi nu prin sute şi mii; o jumătate de duzină ar trebui să înlocuiască un milion; mulțumiți-vă cu unghia de la degetul mare pentru a vă scrie calculele”.

Bibliografie:

Will Durant (2002) Civilizații istorisite – Moştenirea noastră orientală