www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro

- Revistă LUNARĂ -

OCTOMBRIE 2013

ISSN 2065 – 6432

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole:

revistaelectronica@mateinfo.ro

1. NOTĂ MATEMATICĂ
Generalizarea unor ecuații funcționale care conțin funcții exponențiale sau logaritmice

Prof. Marcel Chiriță,București

Problema 1.O generalizare a ecuației functionale $f(3^x) + f(4^x) = x$ dată de prof. Marcel Chiriţă la concursul anual al revistei Gazeta Matematică pe anul 1998.

Fie $a > 1$, $a > 1$, $a \neq b$ și $m,n \in R$, $m \neq 0$. Să se determine funcțiile $f:[0, \infty) \to R$ continue pentru care $f(a^x) + f(b^x) = mx + n$, $x \in [0,\infty)$.

Rezolvare. Ecuația se mai poate scrie $f((ab)^{x\log_{ab}a}) + f((ab)^{x\log_{ab}b}) = mx + n$.

Presupunem că $a > b$. Notăm $\log_{ab}a = c$ și din $\log_{ab}ab = 1 \Longrightarrow \log_{ab}b = 1 - c > 0$.

Din $a > b \Longrightarrow \log_{ab}a > \log_{ab}b \Longrightarrow c > 1 - c$. Notăm cu $d = \frac{1-c}{c} \in (0,1)$.

Notăm cu $h(t) = \frac{f((ab)^t)-\frac{n}{2}}{m}$, $t \in [0,\infty)$.

Obținem $mh(cx) + \frac{n}{2} + mh((1-c)x) + \frac{n}{2} = mx + n$, $x \in [0,\infty)$. $\Leftrightarrow$

$$h(cx) + h((1-c)x) = x, \ x \in [0,\infty). \qquad (1)$$

Ecuația (1) admite soluția $h(x) = x$.

Facem substituția $h(x) = \varphi(x) + x$, unde $\varphi : [0, \infty) \to R$ și obținem (2)

$$\varphi(cx) + \varphi((1-c)x) = 0 \qquad (3)$$

$\Rightarrow |\varphi(cx)| = |\varphi((1-c)x)| \Rightarrow |\varphi(x)| = \left|\varphi\left(\left(\frac{1-c}{c}\right)x\right)\right|$

$\Rightarrow |\varphi(x)| = |\varphi(dx)|$ .Obținem prin iterare $|\varphi(x)| = |\varphi(dx)| = |\varphi(d^2x)| = |\varphi(d^3x)| = ... = |\varphi(d^n x)|$ unde $n \in N^*$.

Rezultă $|\varphi(x)| = |\varphi(d^n x)|$ unde $n \in N^*$.

Deoarece f este continuă $\Rightarrow$ h este continuă $\Rightarrow$ φ este continuă și trecând la limită după n obținem $|\varphi(x)| = |\varphi(0)|$, $x \in [0,\infty)$. (4)

Din (3) avem $\varphi(0) + \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$ (5)

Din (4) și (5) obținem $\varphi(x) = 0$, $x \in [0,\infty)$. (6)

Din (2) și (6) obținem $h(x) = x \Rightarrow \frac{f((ab)^t)-\frac{n}{2}}{m} = t$, $t \in [0,\infty) \Rightarrow$

$f((ab)^t) = mt + \frac{n}{2}$, $t \in [0,\infty) \Rightarrow f(x) = m\log_{ab} x + \frac{n}{2}$, $x \in [1,\infty)$.

In final există o singură funcție $f(x) = m\log_{ab} x + \frac{n}{2}$, $x \in [1,\infty)$, care verifică ecuația fincțională

Problema 2.Fie a, b, d ϵ $(0, \infty)$, $a\neq b$ și c ϵ R. Determinati functiile f: $R \rightarrow R^*$, continue, pentru care avem

$$f(ax) = d^{cx} f(bx),\ \forall\ x \in R.$$

Prof. Marcel Chirita ,București

Rezolvare. Dacă d = 1 sau c = 0 atunci $f(ax) = f(bx)\ \forall\ x \in R$ și cum funcția este continuă rezultă că funcția este continuă adică $f(x) = k$, $k \in R^*$, $\forall\ x \in R$.

Fie $d \neq 1$ și $c \neq 0$.

Fie funcția F: $R \rightarrow R$, $F(x) = (x)\log_d |f(x)| - tx$, unde $t \in R$.

Avem $F(ax) - F(bx) = \log_d |f(ax)| - tax - \log_d |f(bx)| + tbx = \log_d \frac{|f(ax)|}{|f(bx)|} + tx(b-a) = \log_d d^{cx} + tx(b-a) = cx + tx(b-a) = x[c + t(b-a)]$.

Dacă $t = (a-b)/c$ atunci $F(ax) = F(bx)$, $\forall x \in R$. Deoarece funcția este continuă rezultă că funcția F este continua adică $F(x) = k$, $k \in R\ \forall x \in R$.

Rezultă $\log_d |f(ax)| - tx = k \Rightarrow \log_d |f(ax)| = \frac{a-b}{c}x + k \Rightarrow |f(ax)| = d^{x\frac{a-b}{c}+k}$

Deoarece f (ax) și f(bx) au același semn rezultă funcțiile

$f_1(x) = kd^{x\frac{a-b}{c}}$ și $f_2(x) = -kd^{x\frac{a-b}{c}}$ unde k este un număr pozitiv constant

Problema 3.Să se determine funcțiile continue f: $R \rightarrow R$ continue în origine cu propietatea că

$$f(\log_a x) - f(\log_b x) = \log_{ab} x,\ \forall\ x \in (0,\infty),\ \text{unde } b > a > 1.$$

Marcel Chiriță,București

Rezolvare.Notăm $t = \log_a x \Leftrightarrow x = a^t$. Atunci $\log_b x = \log_b a^t = t \log_b a$ și $\log_{ab} a^t = t \log_{ab} a$.

Notăm cu $u = \log_b a$ și cu $v = \log_{ab} a$ și atunci $u,n \in (0,1)$.

Relația din enunț devine $f(t) - f(ux) = vt$ și avem pe rând $f(ut) - f(u^2x) = uvt$,

$f(u^2t) - f(u^3x) = u^2vt$,......, $f(u^{n-1}t) - f(u^nx) = u^{n-1}vt$. Adunând relațile obținem

$f(t) - f(m^nx) = vt(1+m^2+m^3+...+m^{n-1}) \Rightarrow f(t) - f(m^nx) = \frac{vt(1-u^n)}{1-u}$.

Trecând la limită , ținând cont de continuitatea funcției f și de faptul că $\lim_{n\rightarrow\infty} m^n = 0$.

Obținem $f(t) - f(0) = \frac{vt}{1-u}$ $\forall\ t \in (0,\infty) \Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{x\log_{ab} a}{1-\log_b a}$ care verifică ecuația.

Problema 4.O generalizare a ecuației functionale $f(16^x) + 2f(4^x) + f(2^x) = x$ dată de prof. Marcel Chiriţă la olimpiada de matematică din municipiul Bucureşti etapa judeţeană ,1999.

Fie $a \in (1,\infty)$ şi $b,c \in R$. Să se determine toate funcţiile continue $f:[1,\infty) \to R$ astfel încât

$$f(a^{4x}) + 2f(a^{2x}) + f(a^x) = bx + c \ \forall x \in [1,\infty).$$

Prof Marcel Chiriță,Bucureşti,Romania.

Soluţie. Fie $g :[1,\infty) \to R$; $g(x) = f(a^{2x}) + f(a^x) - \frac{bx}{3} - \frac{c}{2}$.

Atunci $g(2x) + g(x) = f(a^{4x}) + f(a2^x) - \frac{2bx}{3} - \frac{c}{2} + f(a^{2x}) + f(a^x) - \frac{bx}{3} - \frac{c}{2} = f(a^{4x}) + 2f(a^{2x}) + f(a^x) - bx - c = 0$, $\forall x \in [1,\infty)$.

Obţinem $g(x) = - g(2x)$ şi prin inducţie rezultă că $g(x) = (-1)^n g\left(\frac{x}{a^n}\right)$, $\forall x \in [0,\infty)$ şi $n \in N^*$.

Cum, pentru $x \in [0,\infty)$, $\frac{x}{a^n} \to 0$ şi g este continuă în 0 rezultă $g\left(\frac{x}{a^n}\right) \to g(0) = 2f(1) - \frac{c}{2}$.

Cum, din enunţ, $f(1) = \frac{c}{4}$ obţinem că $(-1)^n g\left(\frac{x}{a^n}\right) \to 0$, deci $g(x) = 0 \ \forall x \in [0,\infty)$, de unde

$f(a^{2x}) + f(a^x) = \frac{bx}{3} + \frac{c}{2} \ \forall x \in [0,\infty)$.

Fie $h:[0,\infty) \to R$, $h(x) = f(a^x) - \frac{bx}{9} - \frac{c}{4}$. Atunci $h(2x) + h(x) = f(a^{2x}) - \frac{2bx}{9} - \frac{c}{4} + f(a^x) - \frac{bx}{9} - \frac{c}{4} = f(a^{2x}) + f(a^x) - \frac{bx}{3} - \frac{c}{2} = 0 \ \forall x \in [0,\infty)$ şi cum $h(0) = f(1) - \frac{b}{4} = 0$, rezultă ca şi în cazul funcţiei g că $h(x) = 0 \ \forall x \in [0,\infty)$.

Obţinem $f(a^x) = \frac{bx}{9} + \frac{c}{4} \ \forall x \in [0,\infty)$, deci $f(x) = \frac{1}{9} b \log_a x + \frac{1}{4} c$.

Pentru a=2,b=1,c=0 obţinem o problemă dată de M.Chiriţă,V şi Matrosenco dată la faza judeteană a olimpiada de matematică din municipiul Bucureşti în anul 1999.

Bibliografie.[1].Concursul anual al revistei Gazeta Matematică pe anul 1998,Gazeta Matematică 1998,nr 10 Pag. 383.

[2]. Vasile Pop-Ecuații funcționale,Editura Mediamira Cluj-Napoca 2002 pag 64,150-151.

[3] *M.Andronache,M.Chiriţă,V.Matrosenco,subiecte date la olimpiada de matematică din municipiul Bucureşti în anul 1999.*

2. Other solutions to Problems 982 and 983 from The College Mathematics Journal

by Roxana Mihaela Stanciu[1] and Nela Ciceu[2]

982. *Proposed by Elias Lampakis, Kiparissia, Greece.*

Let H be the orthocenter, R the circumradius, h_a, h_b, h_c the altitudes, with respect to the vertices A, B, C of an acute triangle ABC. Prove that

$$h_a(HA-R)+h_b(HB-R)+h_c(HC-R)\geq 0.$$

Solution:
We have that:

$$HA-R=2R\cos A-R=R\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}-1\right)=R\cdot\frac{b^2-bc+c^2-a^2}{bc},S=\frac{abc}{4R}$$

and

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\cdot\frac{abc}{4R}=\frac{bc}{2R}.$$

Therefore, the given inequality becomes:

$$b^2-bc+c^2-a^2+c^2-ca+a^2-b^2+a^2-ab+b^2-c^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\text{, true.}$$

We have equality if and only if $a=b=c$.

983. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB=AC$ and $\angle A=100°$. Let D be a point on side AB so that $\angle BCD=10°$ and let E be a point on side BC so that $EC=AC$. Find a point K on the line segment CD so that triangles KAD and KCE have equal area.

Solution:
WLOG we consider $AB=AC=1$ and we denote $\angle CAK=x$.
We deduce that:

$$\angle ADC=50^0,\angle DAC=100^0-x,\angle AKC==150^0-x.$$

By the Law of Sines in triangles ΔADC and ΔAKC we obtain that:

$$\frac{AD}{\sin 30^0}=\frac{AC}{\sin 50^0}\Rightarrow AD=\frac{1}{2\sin 50^0};$$

---

[1] Liceul cu Program Sportiv ''Iolanda Balas Soter'', Buzău
[2] Roșiori, Bacău

$$\frac{AK}{\sin 30^0} = \frac{AC}{\sin(150^0 - x)} = \frac{KC}{\sin x} \Rightarrow AK = \frac{1}{2\sin(x+30^0)}; KC = \frac{\sin x}{\sin(x+30^0)}.$$

From $Area(\Delta KAD) = Area(\Delta KCE)$ we have that:

$$AD \cdot AK \cdot \sin(100^0 - x) = CK \cdot CE \cdot \sin 10^0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x+80^0)}{4\sin 50^0 \sin(x+30^0)} = \frac{\sin x \sin 10^0}{\sin(x+30^0)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 10^0 \sin 50^0 \sin x = \sin(x+80^0) \Leftrightarrow 2\sin x(\cos 40^0 - \cos 60^0) = \sin(x+80^0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 40^0 = \sin x + \sin(x+80^0) \Leftrightarrow 2\sin x \cos 40^0 = 2\sin(x+40^0)\cos 40^0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin(x+40^0) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x+20^0)\sin(-20^0) = 0 \Leftrightarrow \cos(x+20^0) = 0.$$

So, there is only one possibility $x = 70^0$, i.e. $\angle KAD = 30^0$.

3. One Problem, Other Seven Solutions

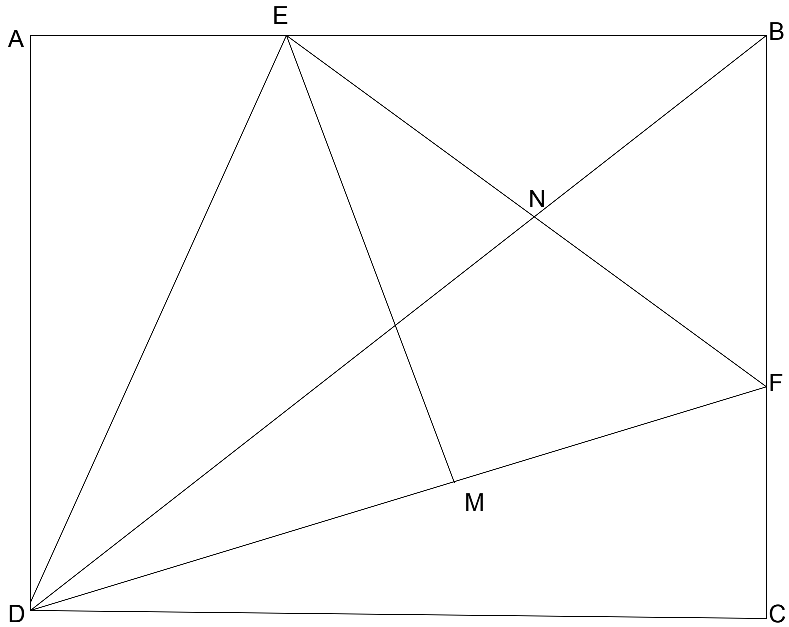
by Neculai Stanciu, Buzău and Titu Zvonaru, Comănești

In this short article, we present, seven elementary solutions , other than was presented in [1], to the following

Problem.

$ABCD$ is a square; E and F are points of trisection of the sides AB and CD respectively, with E closer to A than to B, and F closer to C than to B (so $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ and $\frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}$). Segments DE and DF are drawn as shown. Show that $\sin \angle EDF = \frac{4}{5}$.

We can consider $AB = 3$, and then $AE = CF = 1$, $EB = BF = 2$. Using the Pythagorean theorem we obtain $DE = DF = \sqrt{10}$, $EF = 2\sqrt{2}$. We denote by $[XY...Z]$ the area of the polygon $XY...Z$. Let $\angle EDF = \theta$, and $\angle FDC = \angle EDA = \alpha$.



I. First solution, elementary, in the classroom

We have $[EDF] = [ABCD] - [ADE] - [BEF] - [CFD] = 9 - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = 4$.
Also we have $[EDF] = \frac{DE \cdot DF \cdot \sin \angle EDF}{2}$. Hence, $\sin \angle EDF = \frac{2 \cdot 4}{10} = \frac{4}{5}$.

II. Second solution, elementary, in the classroom

Let M be the projection of the point E on the side DF, i.e. $M = \mathrm{Pr}_{DF} E$. We have that

$[DEF] = \frac{DF \cdot EM}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sqrt{10} \cdot EM}{2}$, so $EM = \frac{8}{\sqrt{10}}$.

Hence, $\sin \angle EDF = \frac{EM}{ED} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

III. Third solution, elementary, in the classroom

Because, $\angle ADE = \angle CDF$, we have that the diagonal BD is the bisector of $\angle EDF$.

Therefore, $tg\frac{\theta}{2} = tg(45^0 - \alpha) = \frac{tg45^0 - tg\alpha}{1 + tg45^0 tg\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Hence, $\sin\theta = \frac{2tg\frac{\theta}{2}}{1 + tg^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$.

IV. Third solution, elementary, in the classroom

We have

$\sin\frac{\theta}{2} = \sin(45^0 - \alpha) = \sin 45^0 \cos\alpha - \cos 45^0 \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, and then $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Hence, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$.

V. Fifth solution, elementary, in the classroom

We denote $N = BD \cap EF$. By isosceles right triangle BEF, we obtain $FN = \frac{1}{2}\cdot EF = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Because $BD = 3\sqrt{2}$, we have $DN = BD - BN = BD - FN = 2\sqrt{2}$. We deduce that $tg\frac{\theta}{2} = \frac{NF}{DN} = \frac{1}{2}$, and we continue as in second solution.

VI. Sixth solution, elementary, in the classroom

With the same notations as in fifth solution, we have $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{NF}{BD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, and $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{DN}{DF} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Hence, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$.

VI. Seventh solution, elementary, in the classroom

Let R be the circumradius of triangle EDF.

We have $R=\dfrac{ED\cdot FD\cdot EF}{4\cdot[EDF]}=\dfrac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}}{4\cdot 4}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$, and by the Law of Sines yields that $\sin\angle EDF=\dfrac{EF}{2R}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4}{5}$.

References

[1] ''One Problem, Six Solutions'', AT RIGHT ANGLES, Vol. 2, No. 1, March 2013.