MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc

www.mateinfo.ro

Revista Electronică MateInfo.ro

DECEMBRIE 2013

ISSN 2065 – 6432

- Revistă LUNARĂ din FEBRUARIE 2009 -

ARTICOLE :

Coordonator: Andrei Octavian Dobre

E-mail pentru articole:
revistaelectronica@mateinfo.ro

1. Rezultate din deșertul nesfârșit al numerelor prime

NECULAI STANCIU[1]

Un **număr prim** este un număr natural care are exact doi divizori: numărul 1 și numărul în sine. Cel mai mic număr prim este 2, în afară de 2 toate numerele prime sunt numere impare.

În anul 300 î.Hr. Euclid a demonstrat că *există o infinitate de numere prime*. Iată: **Demonstrația 1.** Presupunând prin absurd că p ar fi cel mai mare număr prim, construim numărul $x = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p + 1$. Acesta nu se divide cu nici unul din numerele 2, 3, 5, ..., p, așadar sau este prim mai mare decât p, sau are un divizor prim mai mare ca p, ceea ce contrazice presupunerea că p ar fi cel mai mare număr prim.

Demonstrația 2. Fie numerele prime: $p_1 = 2$, primul număr prim; $p_2 = 3$, al doilea număr prim; $p_3 = 5$, al treilea număr prim, ș.a.m.d. Presupunem prin absurd că mulţimea numerelor prime ar fi $\{p_1, p_2,.., p_n\}$, adică finită. Construim numărul $x = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Ce fel de număr este x? Este prim sau compus?

Este evident că restul împărţirii lui x la fiecare din numerele $p_1, p_2,..., p_n$ este 1. Asta înseamnă că x nu este divizibil cu niciun număr prim din mulţimea $\{p_1, p_2,.., p_n\}$. Înseamnă că avem două posibilităţi. Dacă x este număr prim, atunci este diferit de $p_1, p_2,..., p_n$, iar dacă x nu este număr prim, atunci are un divizor prim diferit de $p_1, p_2,..., p_n$. Deci în ambele cazuri obţinem un număr prim diferit de $p_1, p_2,..., p_n$ și prin urmare mulţimea $\{p_1, p_2,.., p_n\}$ nu conţine toate numerele prime. Contradicţie!

Exemple.

- Să ne imaginăm că 3 este cel mai mare număr prim (!), atunci mulţimea numerelor prime este $\{2,3\}$ și $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. S-a întâmplat că 7 este prim, deci am găsit un nou număr prim, contrar presupunerii făcute că 3 este cel mai mare număr prim.
- Dacă ne gândim că 5 este cel mai mare număr prim, atunci mulţimea numerelor prime ar fi $\{2,3,5\}$ și $x = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$. S-a întâmplat, iarăși, să rezulte un număr prim, adică 31, contrar presupunerii făcute că 5 este cel mai mare număr prim.
- Similar, dacă ne-am imagina ca 13 să fie cel mai mare număr prim, atunci mulţimea numerelor prime este $\{2,3,5,7,11,13\}$, deci $x = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$. De această dată s-a întâmplat ca numărul 30031 să fie compus cu desompunerea în factori primi

[1] Profesor, Şc. ''G.E. Palade'' Buzău

$30031 = 59 \cdot 509$. Am găsit astfel două numere prime (59 și 509), care contrazic ipoteza că 13 este cel mai mare număr prim.

Se observă că exact așa a spus și Euclid. Niciodată nu a afirmat că x este număr prim, ci că un nou număr prim va fi găsit, adică x este ori prim, ori compus.

Demonstraţia 3. Presupunem că p este cel mai mare număr prim și se construiește numărul $y = p! + 1$. Din nou, ca mai sus, se obţin noi numere prime.

Demonstraţia 4 (Ernst Kummer). Presupunem că p_n este cel mai mare număr prim și că $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ este mulţimea tuturor numerelor prime. Construim numărul $z = p_1 p_2 ... p_n - 1$. Acest număr trebuie să aibă un divizor număr prim și acest divizor trebuie să fie unul din numerele prime $p_1, p_2, ..., p_n$, deoarece am presupus că acestea sunt toate numerele prime care există. Să presupunem că divizorul prim al lui y este p_k. Evident p_k este de asemenea și un divizor al lui $z+1$, deoarece $z+1 = p_1 p_2 ... p_n$. Așadar, deoarece p_k divide atât pe z cât și pe $z+1$, atunci p_k trebuie să dividă diferenţa dintre $z+1$ și z, care este 1. Dar, acest lucru este absurd, deoarece niciun număr prim nu poate fi divizor al lui 1. Astfel, am ajuns la contradicţie și urmează concluzia că există o infinitate de numere prime.

Să observăm că toate demonstraţiile de mai sus au la bază ideea lui Euclid; demostraţia prin absurd. Rezumăm astfel :

- Considerăm orice mulţime finită de numere prime X ;
- Construim un număr n care este cu 1 mai mare ca produsul tututror numerelor din X. Atunci, n este fie număr prim, fie are un divizor, număr prim q. În orice situaţie obţinem un nou număr prim n sau q care nu este în X.

Există însă și multe demonstraţii care nu folosesc reducerea la absurd. Iată,

Demonstraţia 5 (George Pólya). Se utilizează numerele lui Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$.

De exemplu avem: $F_0 = 2^1 + 1 = 3$; $F_1 = 2^2 + 1 = 5$; $F_2 = 2^4 + 1 = 17$; $F_3 = 2^8 + 1 = 257$;

$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$. Observăm că primele cinci numere scrise sunt toate prime, dar următorul număr Fermat, i.e. $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

George Pólya a observat că aceste numere au proprietatea că sunt mutual coprime, i.e. cel mai mare divizor comun al numerelor F_m și F_n este 1, oricare ar fi numerele naturale $m \neq n$ (lăsăm demonstraţia aceastei afirmaţii ca exerciţiu).

Fiecărui număr Fermat i se poate asocia propria mulţime a divizorilor săi primi. Așadar, pentru fiecare număr natural n avem un număr Fermat și prin urmare o mulţime nevidă de numere prime corespunzătoare. Deoarece există o infinitate de numere naturale, există o infinitate de numere Fermat și o infinitate de mulţimi disjuncte două câte două. Luăm reuniunea acestor mulţimi disjuncte şi obţinem că mulţimea numerelor prime este infinită. Observăm că această demonstraţie nu este bazată pe contradicţie.

Menţionăm că Christian Goldbach a avut exact aceeași idee.

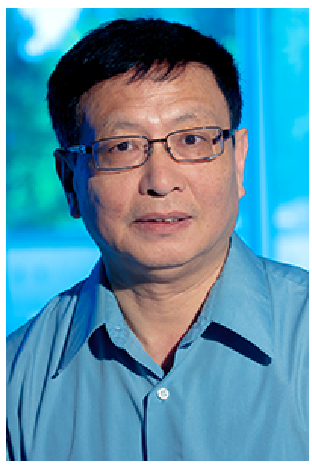
Numere prime gemene

$$2, 3, 5, 7, 11, 13,...$$

Privind la mulţimea infinită a numerelor prime observăm perechile (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), ș.a.m.d. Natural ne punem întrebarea: există o infinitate de astfel de perechi? Altfel spus, există o infinitate de numere prime p, astfel încât p și $p+2$ sunt ambele prime? Conjectura numere prime gemene afirmă că există o infinitate de astfel de numere. Până în prezent cea mai mare pereche găsită (la data de 25 decembrie 2011) este

$$\left(3756801695685 \cdot 2^{666669} - 1, 3756801695685 \cdot 2^{666669} + 1\right).$$

O generalizare naturală a conjecturii precedente este conjectura Polignac. Fie un număr natural par k, există o infinitate de numere prime p astfel încât p și $p+k$ sunt ambele prime.



Yitang Zhang

La 17 aprilie, 2013, o lucrare a ajuns în inbox-ul renumitei reviste de matematică “Annals of Mathematics”. Scrisă de un matematician practic necunoscut experților în domeniul său - un lector de 58 de ani de la Universitatea din New Hampshire numit Yitang Zhang - care a susținut că a făcut un pas uriaș înainte în înțelegerea uneia dintre cele mai vechi probleme de matematică ’’conjectura numere prime gemene’’- există o infinitate de perechi de numere prime care diferă cu doar 2. Şi ’’conjectura Goldbach’’ - fiecare număr par este suma a două numere prime - printr-o coincidență uimitoare, o versiune mai slabă a fost stabilită într-un document postat on-line(http://arxiv.org/pdf/1305.2897v1.pdf) de către Harald Helfgott de la École Normale Supérieure din Paris.

Rezultatul lui Zhang:

$$\lim_{n\to\infty}\inf(p_{n+1}-p_n)<k\text{, unde } k=7\cdot 10^7.$$

Doar trei săptămâni mai târziu - o clipire din ochi, comparativ cu ritmul de obicei lent de întocmire a referatelor revistelor importante de matematică - Zhang a primit raportul referentului la lucrarea lui. ’’Principalele rezultate sunt de prim rang’’, a scris unul dintre referenţi. Lucrarea s-a dovedit a fi ’’o teoremă punct de reper în distribuția de numere prime’’. ’’Practic, nimeni nu-l știe’’, a declarat Andrew Granville, un teoretician al numerelor de la Université de Montréal. ’’Mari experți în domeniu au încercat să abordeze acest lucru’’, a spus Granville. ’’El nu este un expert cunoscut, dar el a reușit în cazul în care toți experții au eșuat’’.

Yitang Zhang a obținut doctoratul în 1991 și cu greu a obținut un loc de muncă academic, înainte lucrând mai mulți ani ca contabil și chiar într-un magazin de sandvișuri în metrou.

’’Acum, dintr-o dată, el a demonstrat unul dintre cele mai mari rezultate din istoria de teoriei numerelor’’(Andrew Granville).

Matematicieni de la Universitatea Harvard au aranjat în grabă, pentru Zhang, o conferinţă pentru a prezenta activitatea sa în 13 mai, 2013.

De sute de ani, matematicienii au speculat că există o infinitate de perechi de numere prime gemene. În 1849, matematicianul francez Alphonse de Polignac a extins această presupunere la ideea că ar trebui să existe o infinitate de perechi de numere prime pentru orice decalaj finit posibil, nu doar 2. Dar, în ciuda multor eforturi de a dovedi, matematicienii nu au putut exclude posibilitatea că diferențele dintre numere prime crește și crește depășind orice barieră particulară. Acum, Zhang a rupt această barieră.

Lucrarea sa arată că există unele numere k, mai mici decât 70 de milioane, pentru care există o infinitate de perechi de numere prime care diferă de k. Nu contează cât de departe te duci în deșertul de numere prime cu adevăarat infinit - indiferent de cât de rar devin perechi – totul tine de găsirea de numere prime perechi care diferă cu mai puțin de 70 de milioane.

Rezultatul este ’’uluitor’’, a spus Daniel Goldston, un teoretician al numerelor de la San Jose State University. ’’Este una dintre aceste probleme de care ați fost sigur că oamenii nu vor fi vreodată în stare să o rezolve’’.

Seminţele rezultatului lui Zhang au fost sădite în urmă cu 8 ani, printr-un rezultat numit de teoriticienii teoriei numerelor GYP(http://arxiv.org/abs/math/0508185), după cei trei autori - D.A. Goldston, János Pintz (de la Alfréd Rényi Institutul de Matematică din Budapesta) și Cem Yıldırım (de la Universitatea Bogazici, din Istanbul).

Între timp, Zhang, un imigrant chinez, care a primit doctoratul de la Universitatea Purdue, întotdeauna interesat de teoria numerelor, a lucrat în singurătate pentru a face o legătură între rezultatul GPY și conjectura numerelor prime gemene. ’’Există o mulțime de șanse în cariera ta, dar cel mai important lucru este de a continua să gândești'', a spus el. ''Această teză (GYP n.a.) m-a impresionat atât de mult'', a spus el. Fără a comunica cu experții în domeniu, Zhang a început să se gândescă la această problemă. Cu toate acestea, după trei ani, el nu a făcut niciun progres. ''Am fost atât de obosit'', a spus el.

Pentru a lua o pauză, Zhang a vizitat un prieten în Colorado vara trecută (2012). Acolo, la 3 iulie, în timpul unei pauze de jumătate de oră în curtea prietenului său, înainte de a pleca la un concert, soluția dintr-o dată i-a venit în minte. ''Am realizat imediat că va funcționa'', a spus el.

Ideea lui Zhang a fost de a utiliza nu sita GPY, ci o versiune modificată a acesteia.

Astfel, noua sită i-a permis lui Zhang să dovedească că există infinit de multe perechi de numere prime mai aproape de 70 de milioane.

Terence Tao a propus ulterior un efort de colaborare și anume proiectul ''Polymath'', pentru a optimiza marginea Zhang. Astfel, în 27 iulie 2013, Thomas Engelsma, a redus marginea la k =4680, iar în 26 noiembrie 2013, la k = 576

(http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Bounded_gaps_between_primes).

Chiar în momentul în care redactez acest articol, 5 decembrie 2013, s-a ajuns la $k = 330$ și cu siguranţă se vor obţine valori mai mici.

Pentru Zhang , care se numește pe sine timid , strălucirea în lumina reflectoarelor a fost oarecum incomodă. În timpul discursului său de la Harvard, participanții au lăudat claritatea sa. Zhang a mai spus că nu simte nici un resentiment despre obscuritatea relativă a carierei sale până în prezent . ''Mintea mea este foarte liniștită . Nu-mi pasă atât de mult de bani, sau onoare'', a spus el . '' Îmi place să fiu foarte liniștit și să continui să lucrez de unul singur '', a mai adăugat acesta.

Între timp , Zhang a început deja să lucreze la următorul său proiect , pe care a refuzat

să-l descrie . ''Să sperăm că va fi un rezultat bun'', a spus el .

Nota autorului: O mare parte a materialului este o adaptare în limba română după materialul de la adresa on-line: https://www.simonsfoundation.org/quanta/20130519-unheralded-mathematician-bridges-the-prime-gap/

2.Other solutions to Problem 214 and Problem 216 from La Gaceta de la RSME

By Nela Ciceu, Roşiori, Bacău and

Roxana Mihaela Stanciu, Liceul cu Program Sportiv Buzău

PROBLEMA 214. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si r y R son, respectivamente, el inradio y el circunradio de dicho triángulo, probar que

$$\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{ab^2c^2}+\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{bc^2a^2}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{ca^2b^2}\le\frac{1}{4r^2R^2}.$$

Let $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, and S be the area of ΔABC. Because we have $R=\dfrac{abc}{4S}$ and $S=pr$, yields that $a^2b^2c^2=16p^2r^2R^2$, so we have to show that:

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\le(a+b+c)^2,$$

which by squaring, we obtain that:

$$\sum a^2(a^2+8bc)+\sum ab\cdot 2\sqrt{(a^2+8bc)(b^2+8ca)}\le(a+b+c)^4\ .$$

By AM-GM inequality we have that:

$$2\sqrt{(a^2+8bc)(b^2+8ca)}\le a^2+b^2+8bc+8ca,$$

and then is enough to show that:

$$\sum a^4+8\sum a^2bc+\sum a^3b+\sum ab^3+8\sum a^2bc+8\sum a^2bc\le$$

$$\le\sum a^4+6\sum a^2b^2+4\sum a^3b+4\sum ab^3+12\sum a^2bc$$

$$\Leftrightarrow 3\sum a^3b+3\sum ab^3+6\sum a^2b^2\ge 12\sum a^2bc$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3b+\sum ab^3+2\sum a^2b^2\ge 4\sum a^2bc \quad (*)$$

Also by AM-GM inequality we have that:

$$\frac{a^3b+a^3b+bc^3}{3} \ge a^2bc\,;\frac{b^3c+b^3c+ca^3}{3} \ge ab^2c\,;\frac{c^3a+c^3a+ab^3}{3} \ge abc^2\,;$$

$$\frac{a^3b+c^3b+bc^3}{3} \ge abc^2\,;\frac{b^3c+a^3c+ca^3}{3} \ge a^2bc\,;\frac{c^3a+b^3a+ab^3}{3} \ge ab^2c\,;$$

$$a^2b^2+b^2c^2 \ge 2ab^2c\,;c^2b^2+a^2c^2 \ge 2abc^2\,;a^2c^2+b^2a^2 \ge 2a^2bc\,,$$

and by adding we obtain the inequality (*).

We have equality iff $a=b=c$.

Remark. The inequality (*) follows immediately by Muirhead' s inequality: because $(3,1,0) \succ (2,1,1)$ and $(2,2,0) \succ (2,1,1)$, i.e $\sum a^3b \ge \sum a^2bc$ and $\sum_{sym} a^2b^2 \ge \sum_{sym} a^2bc$.

Problema 216. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo isósceles ABC con ángulos $A = B > \pi/3$, denotamos por L y M los puntos medios de las lados AC y BC respectivamente. La mediatriz de BL corta a AC en D. La circunferencia inscrita al triángulo BCD es tangente al lado BC en el punto E. Sea F el punto simétrico de E respecto a M y G el simétrico de D respecto a B. Si H es la intersección de EG y DF, probar que H es el punto medio del segmento DF.

Denoting $a = AB, a = AC = BC$, we have that:

$$BL^2 = \frac{2a^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{a^2+2c^2}{4},$$

and then:

$$BL^2+LA^2-AB^2 = \frac{a^2+2c^2}{4}+\frac{a^2}{4}-c^2 = \frac{a^2-c^2}{2} \qquad (1)$$

Because $A = B > \dfrac{\pi}{3}$, we deduce that:

$C < \frac{\pi}{3}$, i.e. $a > c$, and then the relation (1) show us that $\angle BLA$ is acute.

Yields that on the line AC we have the order $A - L - A - D$.

Since E is the tangent point of the inscribed circle in ΔBCD, we have that:

$$2BE = BD + BC - DC = BC + LD - AC - AD = LA + AD - AD = LA = \frac{a}{2},$$

where we use the facts that the triangles BDL and ABC are isosceles.

Hence, by Menalus' theorem in triangle BDF with the secant $G - E - H$ we obtain that:

$$\frac{GB}{GD} \cdot \frac{HD}{HF} \cdot \frac{EF}{EB} = 1 \Leftrightarrow \frac{GB}{2 \cdot GB} \cdot \frac{HD}{HF} \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = 1 \Rightarrow HD = HF,$$

and we are done.

3. Integrale “surori”

Prof. Humă Irina Oana, ColegiulTehnic “Gheorghe Cartianu”, Piatra Neamț

Vă propun spre rezolvare următoarele integrale:

1) $\int \sin^2 x dx \ , x \in \mathbb{R}$

2) $\int \sin^2 x \cdot e^x dx \ , x \in \mathbb{R}$

3) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \ , x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx \ , x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

5) $\int \frac{e^x + 2x^2 + 5x + 2}{e^x + 4x^2 + 2x + 2} dx \ , x \in \mathbb{R}$

La rezolvareaacestoranu se pot aplicametodelecunoscute: integrareaprinpărțisaumetodaschimbării de variabilă. Pentruacesteavomapela la așazisaintegrală“soră”, o integrală care împreună cu ceainițialăformeazăunsistem de tipul:

$$\begin{cases} I + J = \dots \\ I - J = \dots \end{cases}$$

Una din aceste două ecuații duce la rezolvarea unei integrale imediate, din tabelul de integrale iar cealaltă presupune rezolvarea unei integrale destul de simplă:

1) $I = \int \sin^2 x dx \ , \ J = \int \cos^2 x dx$

$$J + I = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)dx = \int 1dx = x + c_1$$

$$J - I = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int \cos 2x dx = \int \frac{(\sin 2x)'}{2}dx = \frac{\sin 2x}{2} + c_2$$

$$\begin{cases} J + I = x + c_1 \\ J - I = \dfrac{\sin 2x}{2} + c_2 \end{cases}$$

Adunândecuațiileobținem:

$$2J = x + \frac{\sin 2x}{2} + c_1 + c_2 \Rightarrow J = \frac{2x + \sin 2x}{4} + \frac{c_1 + c_2}{2}$$

$$I = x + c_1 - \frac{2x + \sin 2x}{2} - \frac{c_1 + c_2}{2} \Rightarrow I = \frac{2x - \sin 2x}{4} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

2) $I = \int \sin^2 x \cdot e^x dx$, $J = \int \cos^2 x \cdot e^x dx$

$$J + I = \int (\sin^2 x + \cos^2 x)e^x dx = \int e^x dx = e^x + c_1$$

$$J - I = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)e^x dx = \int \cos 2x \cdot e^x dx$$

Notăm integrala obținută cu A= $\int \cos 2x \cdot e^x dx$ iarpentrurezolvareaeivomaplicametoda de integrareprinpărți:

$$A = \int \cos 2x \cdot (e^x)'dx = \cos 2x \cdot e^x - \int (\cos 2x)' \cdot e^x dx = \cos 2x \cdot e^x - 2\int (-\sin 2x)e^x dx =$$
$$= \cos 2x \cdot e^x + 2\int \sin 2x e^x dx = \cos 2x \cdot e^x + 2\int \sin 2x (e^x)'dx = \cos 2x \cdot e^x + 2\sin 2x \cdot e^x - 2\int (\sin 2x)'e^x dx$$

$$\begin{cases} J + I = e^x + c_1 \\ J - I = \dfrac{(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x}{5} + c_2 \end{cases}$$

$$2J = e^x + \frac{(\cos 2x + 2\sin 2x)e^x}{5} + c_2 + c_1 = \frac{(\cos 2x + 2\sin 2x + 5)e^x}{5} + c_2 + c_1$$

$$J = \frac{(\cos 2x + 2\sin 2x + 5)e^x}{10} + \frac{c_2 + c_1}{2}$$

$$I = e^x + c_1 - \frac{(\cos 2x + 2\sin 2x + 5)e^x}{10} - \frac{c_2 + c_1}{2} = \frac{(5 - \cos 2x - 2\sin 2x)e^x}{10} + \frac{c_2 - c_1}{2}$$

3) $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$$I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int 1 dx = x + c_1$$

$$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x + \cos x} = \int \frac{2\sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} - x}{2}}{2\sin \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}} dx =$$

$$= \int \frac{\cos \frac{\pi}{4} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4} \cos(x - \frac{\pi}{4})} dx = \int tg(x - \frac{\pi}{4}) dx = -\ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right| + c_2$$

$$\begin{cases} I + J = x + c_1 \\ I - J = -\ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right| + c_2 \end{cases}$$

$$2I = x - \ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right| + c_1 + c_2 \Rightarrow I = \frac{x - \ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right|}{2} + \frac{c_1 + c_2}{2}$$

$$J = x + c_1 - \frac{x - \ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right|}{2} - \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{x + \ln\left|\cos(x - \frac{\pi}{4})\right|}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

4) $I = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$, $J = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

$$I+J=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=x+c_1$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\sin 2x} \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2=\sqrt{1+\sin 2x}^{\,2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x \Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$I-J=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int \frac{\sqrt{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)}}{(1+\sin 2x)}=$$

$$=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 2x}}{1+\sin 2x}dx=\int \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{1+\sin 2x}dx=\int \frac{\left|\cos 2x\right|}{1+\sin 2x}dx$$

$$\left|\cos 2x\right|=+\cos 2x \;, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{cases} I+J=x+c_1 \\ I-J=\ln\left|1+\sin 2x\right|+c_2 \end{cases}$$

$$2I=x+\ln\left|1+\sin 2x\right|+c_1+c_2 \Rightarrow I=\frac{x+\ln\left|1+\sin 2x\right|}{2}+\frac{c_1+c_2}{2}$$

$$J=x+c_1-\frac{x+\ln\left|1+\sin 2x\right|}{2}-\frac{c_1+c_2}{2}=\frac{x-\ln\left|1+\sin 2x\right|}{2}+\frac{c_1-c_2}{2}$$

5) $\displaystyle\int \frac{e^x+2x^2+5x+2}{e^x+4x^2+2x+2}dx$, $\displaystyle J=\int \frac{2x^2-3x}{e^x+4x^2+2x+2}dx$

$$I+J=\int \frac{e^x+2x^2+5x-3x+2}{e^x+4x^2+2x+2}dx=x+c_1$$

$$I - J = \int \frac{e^x + 8x + 2}{e^x + 4x^2 + 2x + 2} = \int \frac{(e^x + 4x^2 + 2x + 2)'}{e^x + 4x^2 + 2x + 2} dx = \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right| + c_2$$

$$\begin{cases} I + J = x + c_1 \\ I - J = \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right| + c_2 \end{cases}$$

$$2I = x + \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right| + c_1 + c_2 \Rightarrow I = \frac{x + \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right|}{2} + \frac{c_1 + c_2}{2}$$

$$J = x + c_1 - \frac{x + \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right|}{2} - \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{x - \ln\left|e^x + 4x^2 + 2x + 2\right|}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

4. SECŢIUNI ÎN CORPURI GEOMETRICE

Prof. Ştefania –Augustina Voiculescu

Şcoala Gimnazială Călmătuiu de Sus, Teleorman

1. Secţiune în tetraedru. Dându-se tetraedrul ABCD si punctele M, N, P pe muchiile sale, asa cum ne arata figura 1.a, să desenăm secţiunea determinată în tetraedru de planul ce trece prin M, N, P.

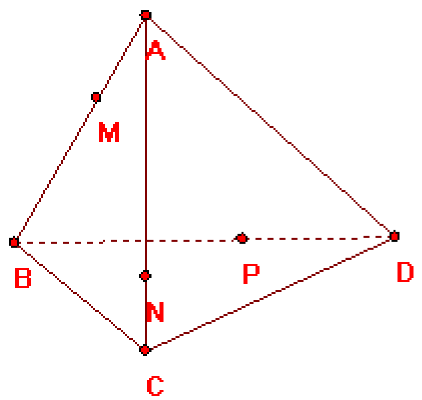


Fig.1.a

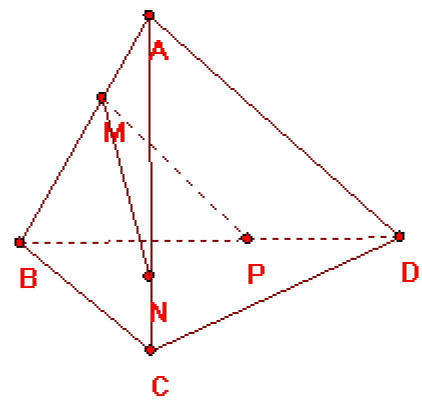


Fig.1.b

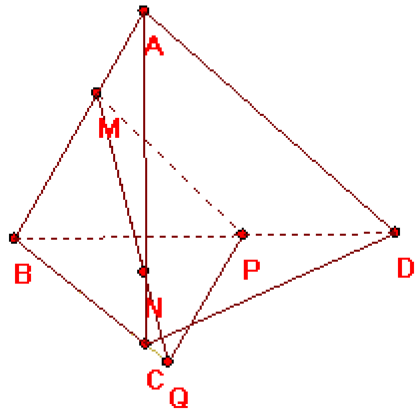


Fig.1.c

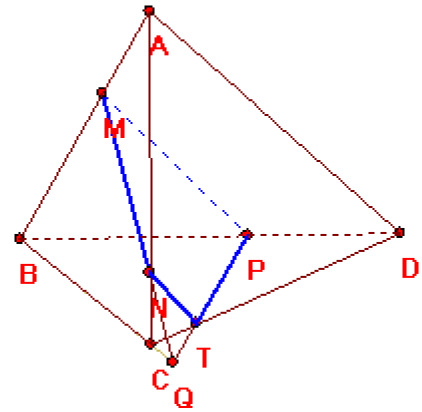


Fig.1.d

Observăm că segmentul [MN] este conţinut in faţa (ABC), la fel [MP] este inclus in planul (ABD). Le figurăm, unind M cu N şi M cu P (fig.1.b). Dreapta MN are comun cu dreapta BC punctul Q, care, fiind pe BC, aparţine şi planului (BCD), la fel ca şi punctul P, deci dreapta PQ este conţinută în planul (BCD) (fig.1.c). Dreapta PQ intersectează pe CD în T. Segmentul [TP] este o latură a secţiunii. Punctele N şi T sunt pe aceeaşi faţă, deci secţiunea este poligonul NMPT cu interiorul său (fig.1.d).

Aplicaţie: În tetraedrul ABCD punctele M, N sunt mijloacele muchiilor [AB] şi [AD], iar P un punct interior muchiei [CD}. Să se determine natura secţiunii determinate în tetraedru de planul ce trece prin M, N, P şi să se deseneze această secţiune.

2. Secţiune în cub. Se dă cubul din figura 2.a cu notaţiile ei, unde : M Є [DD’], N Є [C’C], P Є [AB], cu MN | | C’D’. Să se deseneze secţiunea determinatăde (MNP) în cub.

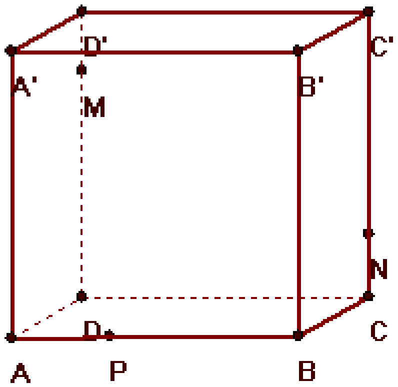


Fig.2.a

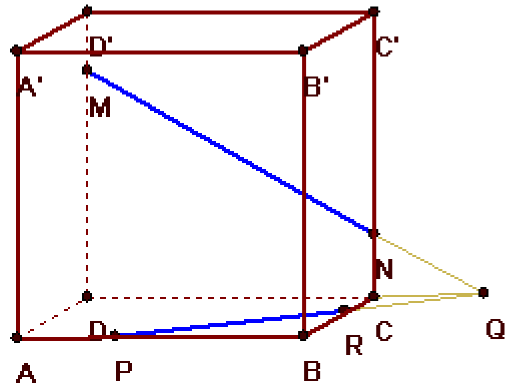


Fig.2.b

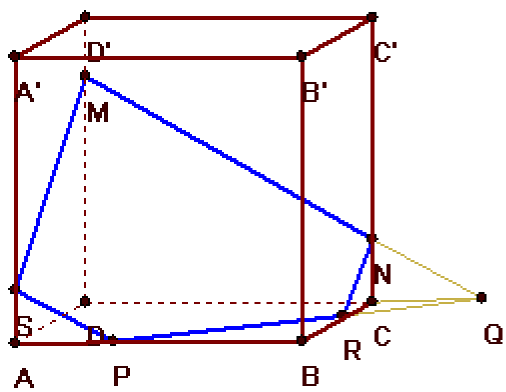


Fig.2.c

Unim M cu N (fiind pe aceeaşi faţă), prelungim dreapta lor până taie pe DC in Q, care aparţine deci planului (C'CD). Unim Q cu P. Notăm cu R intersecţia dreptei CB cu dreapta PQ (fig.2.b). Am obţinut segmentul [NR] al secţiunii. Ducem, pe faţa (AA'D'D), MS | | NR, (S Є A'A). Unim S cu P. Secţiunea căutată este poligonul PRNMS cu interiorul său (fig.2.c).

Aplicaţie: Să se determine , în cuburile din figura 3, secţiunile determinate de planele ce trec prin puncteleM, N, P.

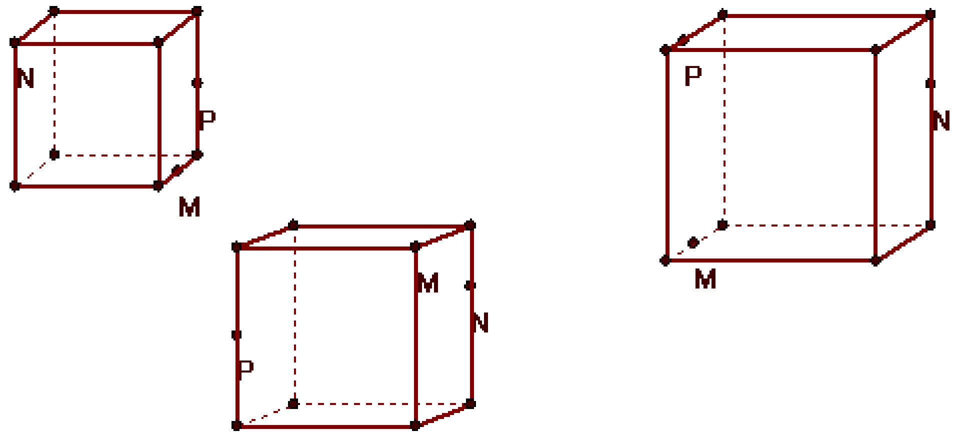


Fig. 3

3. Secţiune în piramidă. Fie VABCD o piramidă patrulateră cu baza ABCD. Fie M, N şi P puncte situate pe muchiile [AB], [VB] şi respectiv [VD], astfel încât AM<AB/2, VN>VD/2. Să se determine forma secţiunii piramidei VABCD cu planul determinat de punctele M, N şi P (fig.4.a).

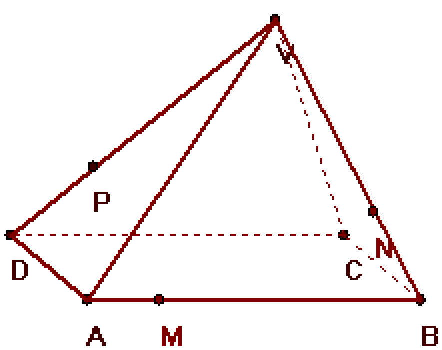


Fig.4.a

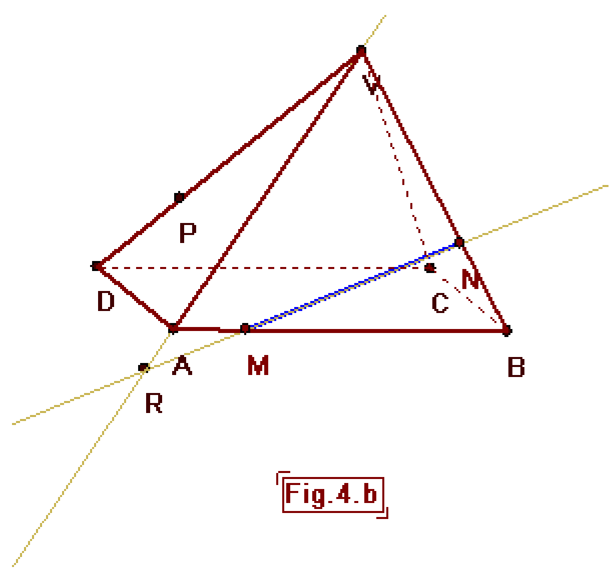


Fig.4.b

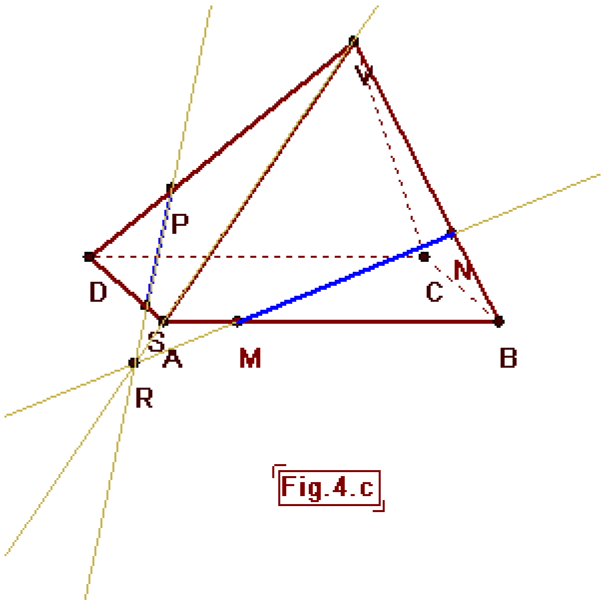


Fig.4.c

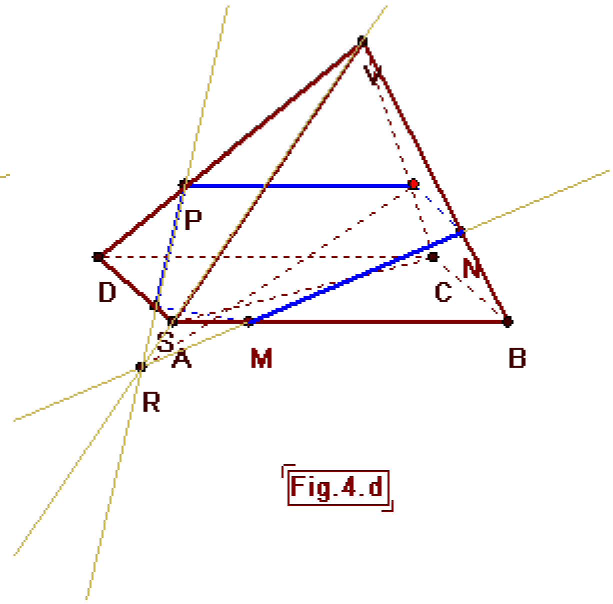


Fig.4.d

Rezolvare: Unim punctele M şi N. Fiind coplanare, dreapta MN intersectează dreapta VA în punctul R (fig.4.b). În planul (VDA), dreapta PR intersectează dreapta DA în punctul S (fig.4.c). Intersecţia planului (PNM) cu planul (ABC) este dreapta SM. Ducem prin punctul P o paralelă la SM care intersectează VC în punctul T. Unim T cu N. Secţiunea căutată este poligonul NMSPT cu interiorul său (fig.4.d).

Bibliografie:

CUCULESCU I., OTTESCU C., POPESCU O. *Matematică,manual pentru clasa a VIII-a*, E.D.P.,R.A., Bucureşti, 1996