REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

MAI 2015

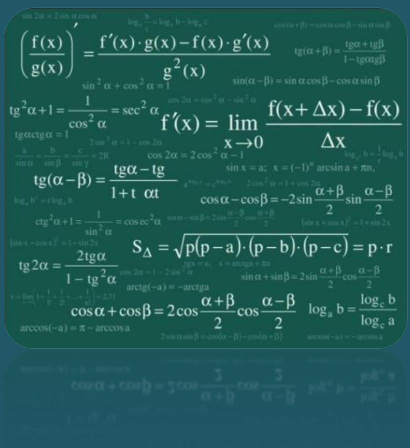
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE

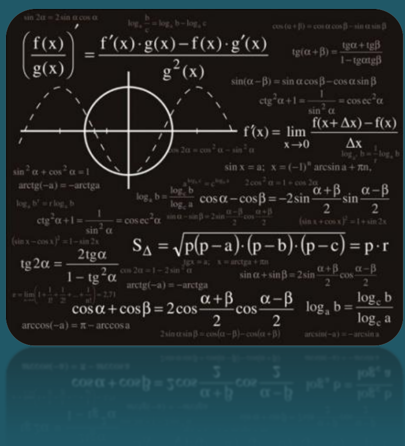
REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

WWW.MATEINFO.RO

revistaelectronica@mateinfo.ro





Articole:

1.În legătură cu o problemă de la primul test de selecţie - seniori 2015 –

de Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău

La primul test de selectie -seniori 2015 a fost propusă următoarea problemă:

Let ABC be a triangle, and let r denote its inradius. Let R_A denote the radius of the circle internally tangent at A to the circle ABC and tangent to the line BC; the radii R_B and R_C are defined similarly. Show that $\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\leqslant\frac{2}{r}$.

Soluția oficială foloseste inversiunea pentru a calcula raza R_A. Dorim să prezentăm o soluție elementară (chiar dacă nu neapărat mai simplă). Pentru aceasta vom demonstra următorul rezultat, interesant în sine.

Fie D punctul de tangență al cercului de rază R_A cu latura BC. Atunci AD este bisectoarea unghiului A.

Presupunem că AB < AC. Tangenta în A la cercul ABC intersectează latura BC în punctul T. Din puterea punctului T față de cerc avem $TA^2=TB(TB+a)$. Aplicând teorema cosinusului obținem:

$$TA^2 = TB^2 + AB^2 - 2\cdot TB\cdot AB\cdot\cos\angle ABT$$
$$TB^2 + a\cdot TB = TB^2 + c^2 + 2\cdot TB\cdot c\cdot\cos B \Rightarrow TB = \frac{c^2}{a-2c\cos B}.$$

Rezultă că

$$BD = TD - TB = TA - TB = \sqrt{TB(TB+a)} - TB =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a-2c\cos B}\cdot\frac{c^2+a^2-2ac\cos B}{a-2c\cos B}} - \frac{c^2}{a-2c\cos B} = \frac{bc-c^2}{a-2c\cos B} =$$
$$= \frac{ac(b-c)}{a^2-a^2-c^2+b^2} = \frac{ac}{b+c},$$

și atunci, conform reciprocei teoremei bisectoarei, deducem că AD este bisectoarea unghiului A.

Fie F aria triunghiului ABC. Centrul O_A al cercului de rază R_A se află la intersecția dintre perpendiculara în D pe BC cu diametrul ce trece prin A al cercului ABC. Avem $\angle O_AAD=90^0-C-A/2$. Din triunghiul isoscel ADO_A obținem

$$R_A = \frac{AD}{2\cos\left(90^\circ - C - \frac{A}{2}\right)} = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)2\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}.$$

Deoarece

$$2(b+c)\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)=(b+c)(\cos C-\cos(A+C))=(b+c)(\cos B+\cos C)=$$
$$=b\cos C+c\cos B+b\cos B+c\cos C=a+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C=$$
$$=a+R(\sin 2B+\sin 2C)=a+2R\sin A\cos(B-C)=a(1+\cos(B-C)),$$

rezultă

$$R_A=\frac{bc\sin A}{2a\cos^2\frac{B-C}{2}}=\frac{F}{a\cos^2\frac{B-C}{2}}.$$

Acum concluzia din problema inițiala rezultă imediat:

$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{a\cos^2\frac{B-C}{2}}{F}+\frac{b\cos^2\frac{C-A}{2}}{F}+\frac{c\cos^2\frac{A-B}{2}}{F}\leqslant\frac{a+b+c}{F}=\frac{2}{r}.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

2. Soluţii pentru unele probleme din revista Mathematical Reflections

de Nela Ciceu, Roşiori, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

J325. For positive real numbers a and b, define their *perfect mean* to be half of the sum of their arithmetic and geometric means. Find how many unordered pairs of integers (a, b) from the set $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ have their perfect mean a perfect square.

Proposed by Ivan Borsenco, Massachusetts Institute of Technology, USA

Soluţie:

Deoarece $$\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2,$$

este clar că (a,b) satisfac enunțul dacă și numai dacă a și b sunt pătrate perfecte cu aceeasi paritate. Există 44 pătrate perfecte în mulțimea {1,2,...,2015}, dintre care 22 pare și 22 impare. Obținem $\binom{22}{2}+\binom{22}{2}=462$ perechi.

J326. Let a, b, c be nonnegative real numbers. Prove that

$$\sqrt{2a^2+3b^2+4c^2}+\sqrt{3a^2+4b^2+2c^2}+\sqrt{4a^2+2b^2+3c^2}\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas

Soluţie:

Aplicând inegalitatea CBS avem

$$3\left(\sqrt{2a^2+3b^2+4c^2}+\sqrt{3a^2+4b^2+2c^2}+\sqrt{4a^2+2b^2+3c^2}\right)=$$
$$\sqrt{(2+3+4)(2a^2+3b^2+4c^2)}+\sqrt{(3+4+2)(3a^2+4b^2+2c^2)}+\sqrt{(4+2+3)(4a^2+2b^2+3c^2)}\geqslant$$
$$\geqslant 2a+3b+4c+3a+4b+2c+4a+2b+3c=9(a+b+c).$$

Folosind inegalitatea cunoscută $3(a+b+c)\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

obținem inegalitatea dorită.

O326. Let ABC be a non-isosceles triangle. Let D be a point on the ray $\overrightarrow{AB}$, but not on the segment AB, and let E be a point on the ray $\overrightarrow{AC}$, but not on the segment AC, such that $AB \cdot BD = AC \cdot CE$. The circumcircles of triangles ABE and ACD intersect in points A and F. Let O_1 and O_2 be the circumcenters of triangles ABC and ADE. Prove that lines AF, O_1O_2, and BC are concurrent.

Proposed by İlker Can Çiçek, Instanbul, Turkey

Soluţie:

Vom nota cu (ABC) cercul circumscris triunghiului ABC si cu ρ_M(ABC) puterea punctului M față de acest cerc. AD este axa radicală a cercurilor (ADC) și (ADE), AE este axa radicală a cercurilor (ABE) și (ADE), iar AF este axa radicală a cercurilor (ADC) și (ABE). Avem

$$\rho_B(ADE) = AB \cdot BD = AC \cdot CE = \rho_C(ADE),$$

deci $BO_2=CO_2$. Deoarece $BO_1=CO_1$, rezultă că O_1O_2 este mediatoarea laturii BC.

Dreapta BC intersectează cercul (ADC) în B' și cercul (ABE) în C'. Obținem:

$$BB' \cdot BC = AB \cdot BD = AC \cdot CE = CC' \cdot BC \quad \Rightarrow BB' = CC'.$$

Fie M intersecția dintre AF și BC. Rezultă

$$MC \cdot MB' = MA \cdot MF = MB \cdot MC' \Leftrightarrow MC(MB + BB') = MB(MC + CC') \Leftrightarrow$$
$$MC \cdot BB' = MB \cdot CC' \Leftrightarrow MC = MB,$$

deci AF trece prin mijlocul laturii BC. Cum și O_1O_2 trece prin mijlocul lui BC, rezultă concluzia dorită.

O327. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Prove that

$$a + b + c \leq \sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} + \sqrt{2-c}.$$

Proposed by An Zhen-ping, Xianyang Normal University, China

Soluţie:

În condiția din enunț există un triunghi ascuțitunghic ABC astfel încât a=2cosA, b=2cosB, c=2cosC. Inegalitatea din enunț devine

cosA + cosB + cosC <= sin(A/2) + sin(B/2) +sin(C/2)   (1)

Conform problemei 1448 (propusă de Jack Garfunkel) din Crux Mathematicorum vol 15(1989), nr. 5, cu soluția in vol 17(1991), nr 8, într-un triunghi ascuțitunghic este adevărată inegalitatea:

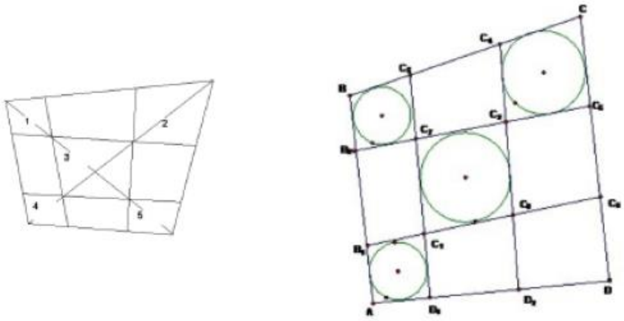
$$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{2}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Rezultă că este suficient să demonstrăm că

$$\frac{2}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2 \leqslant \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2},$$

care exact itemul 2.9 din Bottema.

O330. Four segments divide a convex quadrilateral into nine quadrilaterals. The points of intersections of these segments lie on the diagonals of the quadrilateral (see figure below).



It is known that quadrilaterals Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 admit inscribed circles. Prove that the quadrilateral Q_5 also has an inscribed circle.

Proposed by Nairi Sedrakyan, Yerevan, Armenia

Soluție:

Presupunem că pe dreptele din figură avem punctele A, B_1, B_2, B; B, C_3, C_4, C; C, C_6, C_9, D; A, D_1, D_2, D; B_1, C_1, C_8, C_9 și B_2, C_7, C_2, C_6.

Vom folosi următoarea

Lemă (Iosifescu): Patrulaterul XYZT este circumscriptibil dacă și numai dacă

$$\tan\frac{\angle YXZ}{2}\cdot\tan\frac{\angle TZX}{2}=\tan\frac{\angle YZX}{2}\cdot\tan\frac{\angle TXZ}{2}.$$

Aplicând lema pentru patrulaterele circumscriptibile Q_4, Q_3, Q_2 avem:

$$\tan\frac{\angle CAD}{2}\cdot\tan\frac{\angle B_1C_1A}{2}=\tan\frac{\angle AC_1D_1}{2}\cdot\tan\frac{\angle BAC}{2}\qquad(1)$$

$$\tan\frac{\angle C_1C_2C_8}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_7C_1C_2}{2}=\tan\frac{\angle C_2C_1C_8}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_1C_2C_7}{2}\qquad(2)$$

$$\tan\frac{\angle CC_2C_6}{2}\cdot\tan\frac{\angle BCA}{2}=\tan\frac{\angle ACD}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_4C_2C}{2}\qquad(3)$$

Prin înmulțirea relațiilor (1), (2) și (3) obținem

$$\tan\frac{\angle CAD}{2}\cdot\tan\frac{\angle BCA}{2}=\tan\frac{\angle BAC}{2}\cdot\tan\frac{\angle ACD}{2},$$

deci patrulaterul ABCD este circumscriptibil.

Folosind acum lema pentru patrulaterele ABCD, Q_1 și Q_3 deducem că

$$\tan\frac{\angle ABD}{2}\cdot\tan\frac{\angle BDC}{2}=\tan\frac{\angle BDA}{2}\cdot\tan\frac{\angle DBC}{2}\qquad(4)$$

$$\tan\frac{\angle B_2C_7B}{2}\cdot\tan\frac{\angle DBC}{2}=\tan\frac{\angle ABD}{2}\cdot\tan\frac{\angle BC_7C_3}{2}\qquad(5)$$

$$\tan\frac{\angle C_8C_7C_1}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_2C_8C_7}{2}=\tan\frac{\angle C_1C_8C_7}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_2C_7C_8}{2}\qquad(6)$$

Prin înmulțirea relațiilor (4), (5) și (6) obținem

$$\tan\frac{\angle BDC}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_2C_8C_7}{2}=\tan\frac{\angle BDA}{2}\cdot\tan\frac{\angle C_1C_8C_7}{2},$$

ceea ce înseamnă că patrulaterul Q_5 este circumscriptibil.

Lema poate fi găsită în [1]; o demonstrație este prezentată în [2].

[1] Nicușor Minculete, *Characterizations of a Tangential Quadrilateral*, Forum Geometricum, 9(2009), 113-118

[2] Martin Josefsson, *More Characterizations of a Tangential Quadrilateral*, Forum Geometricum, 11(2011), 65-82

S327. Let H be the orthocenter of an acute triangle ABC and let D and E be the feet of the altitudes from vertices B and C, respectively. Line DE intersects the circumcircle of triangle ABC in points F and G (F lies on the smaller arc of AB and G lies on the smaller arc of AC). Denote by S the projection of H onto line DE. Prove that $EF + DS = DG + ES$.

Proposed by İlker Can Çiçek, Instanbul, Turkey

Soluţie:

Deoarece patrulaterul BCDE este inscriptibil, atunci <EDH=<ECB=90^0-B și <DH=<DBC=90^0-C. Cum EH=2RcosAcosB, DH=2RcosAcosC. rezultă că

ES=EHsinC = 2RcosAcosBsinC, DS=DHsinB=2RcosAcosCsinB.

Folosind puterea punctului față de cerc obținem:

EF.EG = EA.EB <=> EF(ED+DG)=abcosAcosB

DG.DF = DA.EC <=> DG(ED+EF)=accosAcosC

Prin scădere avem ED(EF-DG)=acosA(bcosB-ccosC); dar ED=acosA, deci EF-DG=bcosB-ccosC. Avem succesiv

EF+DS=DG+ES <=> EF-DG=ES-DS

<=> bcosB-ccosC = ccosAcosB-bcosAcosC

<=> cosB(b-ccosA)=cosC(c-bcosA) <=> acosBcosC = acosBcosC

(am folosit faptul că acosC+ccosA=b).

U325. Let $A_1B_1C_1$ be a triangle with circumradius R_1. For each $n \geq 1$, the incircle of triangle $A_nB_nC_n$ is tangent to its sides at points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}. The circumradius of triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, which is also the inradius of triangle $A_nB_nC_n$, is R_{n+1}. Find $\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n}$.

Proposed by Ivan Borsenco, Massachusetts Institute of Technology, USA

Deoarece $\angle B_1A_2C_2 = 90^\circ - \frac{B_1}{2}, \angle C_1A_2B_2 = 90^\circ - \frac{C_1}{2}$,

obținem $A_2 = \frac{B_1 + C_1}{2} = \frac{3\cdot 60^\circ - A_1}{2} = 60^\circ - \frac{-1}{2}(60^\circ - A_1)$,

$$A_3 = \frac{3\cdot 60^\circ - A_2}{2} = \frac{3\cdot 60^\circ - \frac{3\cdot 60^\circ - A_1}{2}}{2} = \frac{3\cdot 60^\circ + A_1}{4} = 60^\circ - \frac{1}{2^2}(60^\circ - A_1).$$

Prin inducție rezultă că $A_n = 60^\circ - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(60^\circ - A_1)$.

Deducem că $\lim_{n\to\infty} A_n = 60^\circ$.

Folosind formula cunoscută $\frac{R_{n+1}}{R_n} = 4\sin\frac{A_n}{2}\sin\frac{B_n}{2}\sin\frac{C_n}{2}$,

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}}{R_n} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

S326. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^3+b^3+c^3+abc=\frac{1}{3}$. Prove that

$$abc+9\left(\frac{a^5}{4b^2+bc+4c^2}+\frac{b^5}{4c^2+ca+4a^2}+\frac{c^5}{4a^2+ab+4b^2}\right)\geq\frac{1}{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

Soluţie:

Notăm p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc. Avem $3(a^3+b^3+c^3)=1-3r$. Aplicând CBS obținem:

$$9\sum\frac{a^5}{4b^2+bc+4c^2}=9\sum\frac{a^6}{4ab^2+4ac^2+abc}\geqslant\frac{9(a^3+b^3+c^3)^2}{4(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+3abc)-9abc}=\frac{(1-3r)^2}{4pq-9r}.$$

Rămâne de arătat că

$$r+\frac{(1-3r)^2}{4pq-9r}\geqslant\frac{1}{4pq}\Leftrightarrow 4pqr-9r^2+1-6r+9r^2\geqslant\frac{4pq-9r}{4pq}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4pqr+1-6r-1+\frac{9r}{4pq}\geqslant 0\Leftrightarrow 4pq-6+\frac{9}{4pq}\geqslant 0\Leftrightarrow(4pq-3)^2\geqslant 0.$$

3. Asupra unor egalități trigonometrice

Prof. Alexandru Elena-Marcela, gradul didactic I
Școala Gimnazială Nr.3 Baia, structura Bogata

1. Dacă $(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$ **,**
arătați că:

$$(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\,.$$

Rezolvare:

$$(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \quad /\cdot\ (1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)$$

Rezultă

$$(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=(\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)$$

de unde

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma=(\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)$$

adică

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)\,.$$

2. Știind că $x+y=z$ **arătați că are loc egalitatea:**

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=1\,.$$

Rezolvare:

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2(x+y)-2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x+y)=1$$

Se utilizează formula: $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$.

Atunci $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2(x+y)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]\cdot\cos(x+y)=1$, de unde $\cos^2 x+\cos^2 y+\cancel{\cos^2(x+y)}-\cancel{\cos^2(x+y)}-\cos(x-y)\cdot\cos(x+y)=1$.

Se obține $\cos^2 x+\cos^2 y-\frac{1}{2}\left[\cos(x-y+x+y)+\cos(x-y-x-y)\right]=1$.

Echivalent cu $\cos^2 x+\cos^2 y-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos 2x+\cos(-2y)\right]=1$. Cosinusul este o funcție pară și folosind formula $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ se obține egalitatea cerută.

3. Arătați că au loc egalitățile următoare pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ **:**

a) $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\ldots+\sin 2nx=\dfrac{\sin nx\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}$ **;**

b) $\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n+1)x=\dfrac{\cos(n+2)x\cdot\sin nx}{\sin x}$ **.**

Rezolvare:

a) Etapa de verificare:

Pentru $n=1$ rezultă $\sin 2x=\dfrac{\cancel{\sin x}\cdot\sin 2x}{\cancel{\sin x}}$ (A)

Etapa de demonstrație:

Presupunem adevărată $p(n)$ și demonstrăm că este adevărată $p(n+1)$. Trebuie să arătăm că:

$$\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\ldots+\sin 2nx+\sin 2(n+1)x=\frac{\sin(n+1)x\cdot\sin(n+2)x}{\sin x}$$

Rezultă $\frac{\sin nx\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}+\sin 2(n+1)x=\frac{\sin(n+1)x\cdot\sin(n+2)x}{\sin x}$. Aducem la același numitor în membrul stâng și renunțăm la numitor. Se obține:

$\sin nx\cdot\sin(n+1)x+\sin 2(n+1)x\cdot\sin x=\sin(n+1)x\cdot\sin(n+2)x$.

Se folosește faptul că $n+1=n+2-1$ și $2(n+1)=2n+2=n+2+n$.

Astfel $\sin nx\cdot\sin\left[(n+2)x-x\right]+\sin\left[(n+2)x+nx\right]\cdot\sin x=$

$=\sin nx\cdot\sin(n+2)x\cdot\cos x\cancel{-\sin nx\cdot\cos(n+2)x\cdot\sin x}+\sin(n+2)x\cdot\cos nx\cdot\sin x\cancel{+\cos(n+2)x\cdot\sin nx\cdot\sin x}$

$=\sin nx\cdot\sin(n+2)x\cdot\cos x+\sin(n+2)x\cdot\cos nx\cdot\sin x$

$=\sin(n+2)x\cdot(\sin nx\cdot\cos x+\cos nx\cdot\sin x)$

$=\sin(n+2)x\cdot\sin(nx+x)$

$=\sin(n+2)x\cdot\sin(n+1)x$. (A)

b) Etapa de verificare:

Pentru $n=1$ rezultă $\cos 3x=\frac{\cos 3x\cdot\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}$ (A)

Etapa de demonstrație:

Presupunem adevărată $p(n)$ și demonstrăm că este adevărată $p(n+1)$. Trebuie să arătăm că:

$$\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n+1)x+\cos(2n+3)x=\frac{\cos(n+3)x\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}$$

Rezultă $\frac{\cos(n+2)x\cdot\sin nx}{\sin x}+\cos(2n+3)x=\frac{\cos(n+3)x\cdot\sin(n+1)x}{\sin x}$. Aducem la același numitor în membrul stâng și renunțăm la numitor. Se obține:

$\cos(n+2)x\cdot\sin nx+\cos(2n+3)x\cdot\sin x=\cos(n+3)x\cdot\sin(n+1)x$.

Se folosește faptul că $n+2=n+3-1$ și $2n+3=n+3+n$.

Astfel $\cos\left[(n+3)-1\right]x\cdot\sin nx+\cos\left[(n+3)+n\right]x\cdot\sin x=$

$=\cos\left[(n+3)x-x\right]\cdot\sin nx+\cos\left[(n+3)x+nx\right]\cdot\sin x$

$=\left[\cos(n+3)x\cdot\cos x+\sin(n+3)x\cdot\sin x\right]\cdot\sin nx+\left[\cos(n+3)x\cdot\cos nx+\sin(n+3)x\cdot\sin nx\right]\cdot\sin x$

$=\cos(n+3)x\cdot\cos x\cdot\sin nx\cancel{+\sin(n+3)x\cdot\sin x\cdot\sin nx}+\cos(n+3)x\cdot\cos nx\cdot\sin x\cancel{-\sin(n+3)x\cdot\sin nx\cdot\sin x}$

$=\cos(n+3)x\cdot\cos x\cdot\sin nx+\cos(n+3)x\cdot\cos nx\cdot\sin x$

$=\cos(n+3)x\cdot[\cos x\cdot\sin nx+\cos nx\cdot\sin x]$

$=\cos(n+3)x\cdot\sin(nx+x)$

$=\cos(n+3)x\cdot\sin(n+1)x$. (A)

4. Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Rezolvare:

Înmulțim ambii membri ai egalității cu $\sin\frac{\pi}{2n}$.

Atunci rămâne de arătat că $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n}$.

Se folosește formula $\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$.

Rezultă:

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$\ldots$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

____(+)

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\cancel{-\cos\frac{3\pi}{2n}}\cancel{+\cos\frac{3\pi}{2n}}\cancel{-\cos\frac{5\pi}{2n}}+\ldots\cancel{+\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}==\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}==\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\left(\frac{\cancel{2n}\pi}{\cancel{2n}}-\frac{\pi}{2n}\right)\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}==\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}==\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2n}.\ (A)$$

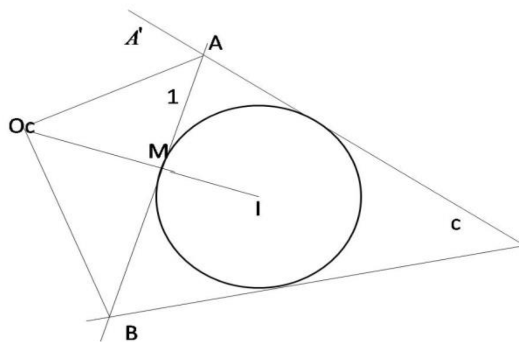
4. Relații metrice pentru razele cercurilor exînscrise unui triunghi

Autor , Prof. Sovejanu Ecaterina ,
Colegiul Tehnic " Gheorghe Asachi "-Onesti

1. Să se arate că în orice triunghi ΔABC este adevărată relația : $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$, unde : r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise , p semiperimetrul iar S aria triunghiului.

Demonstrație

Notăm punctul de tangență al laturii AB cu cercurile înscris și exînscris cu M iar cu O_C centrul cercului exînscris, determinat de prelungirile laturilor CA și CB și cu A_1 jumătate din măsura unghiului MAA' (fig. de mai jos).



tg $A_1 = tg(\frac{\pi - A}{2}) = ctg\frac{A}{2}$ (1)

În triunghiul dreptunghic AO_cM , unghiul M=$\frac{\pi}{2}$, $tgA_1=\frac{MO_C}{AM}=\frac{r_c}{AM}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow ctg\frac{A}{2}=\frac{r_c}{AM}\Rightarrow tg\frac{A}{2}=\frac{AM}{r_c}\Rightarrow AM=r_c tg\frac{A}{2}$

Făcând un raționament asemănător pentru vârful B $\Rightarrow tg\frac{B}{2}=\frac{BM}{r_c}\Rightarrow BM=r_c tg\frac{B}{2}$

Cum AM+ MB=AB=c $\Rightarrow tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}=\frac{c}{r_c}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{c}{r_c}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-c)}{p(p-a)(p-b)}}(2p-a-b)=\frac{c}{r_c}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-c}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.c=\frac{c}{r_c}\Leftrightarrow \frac{p-c}{S}.c=\frac{c}{r_c}\Rightarrow S=r_c(p-c)$$

Analog demonstrăm și celelate egalități.

Aplicații ale acestei proprietăți.

2.Să se arate că în orice triunghi ΔABC este adevărată relația:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise , r raza cercului înscris iar S aria triunghiului.

Demonstrație :
Înlocuind r_a, r_b, r_c conform relației demonstrate la problema 1 , egalitatea devine:

$$\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{1}{r}\Leftrightarrow\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{1}{r}\Leftrightarrow\frac{p}{S}=\frac{1}{r}\Leftrightarrow S=pr$$
, egalitate adevărată în orice triunghi.

3. Să se arate că în orice triunghi ΔABC există relația : $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise , r raza cercului înscris iar S aria triunghiului.

Demonstrația este imediată înlocuind raza cercului înscris și razele cercurilor exînscrise cu formulele obținute în problema 1.

4. Să se arate că în orice triunghi ΔABC este adevărată relația:

$$\frac{a^2}{r_a(r_b+r_c)}+\frac{b^2}{r_b(r_c+r_a)}+\frac{c^2}{r_c(r_a+r_b)}=2$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exîncrise iar a, b, c sunt , respectiv lungimile laturilor
.

Demonstrație : Conform problemei 1 deducem că :

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}}=p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=p\cdot tg\frac{A}{2}$$

$$r_a(r_b+r_c)=ptg\frac{A}{2}(ptg\frac{B}{2}+ptg\frac{C}{2})=p^2tg\frac{A}{2}(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})=p^2tg\frac{A}{2}\frac{\sin(\frac{B+C}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=p^2tg\frac{A}{2}\frac{\sin(\frac{\pi-A}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=p^2tg\frac{A}{2}\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=p^2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=p^2\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}}=$$

$$=p^2\frac{a}{p}=ap\Rightarrow\frac{a^2}{r_a(r_b+r_c)}=\frac{a}{p}\,(1)$$

Analog , se arată că :

$$\frac{b^2}{r_b(r_c+r_a)}=\frac{b}{p}\quad \text{și}\quad \frac{c^2}{r_c(r_a+r_b)}=\frac{c}{p}\Rightarrow\frac{a^2}{r_a(r_b+r_c)}+\frac{b^2}{r_b(r_c+r_a)}+\frac{c^2}{r_c(r_a+r_b)}=\frac{a+b+c}{p}=2$$

5. Să se arate că în orice triunghi ΔABC este adevărată relația:

$$r_a(r_b+r_c)+r_b(r_c+r_a)+r_c(r_a+r_b)=2p^2$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise iar p semiperimetrul triunghiului.

Demonstrație: Conform problemei anterioare

$$r_a(r_b+r_c)=ap,\ r_b(r_a+r_c)=bp\ ,\ r_c(r_a+r_b)=cp \Rightarrow r_a(r_b+r_c)+r_b(r_a+r_c)+r_c(r_a+r_b)=$$
$$=p(a+b+c)=2p^2$$

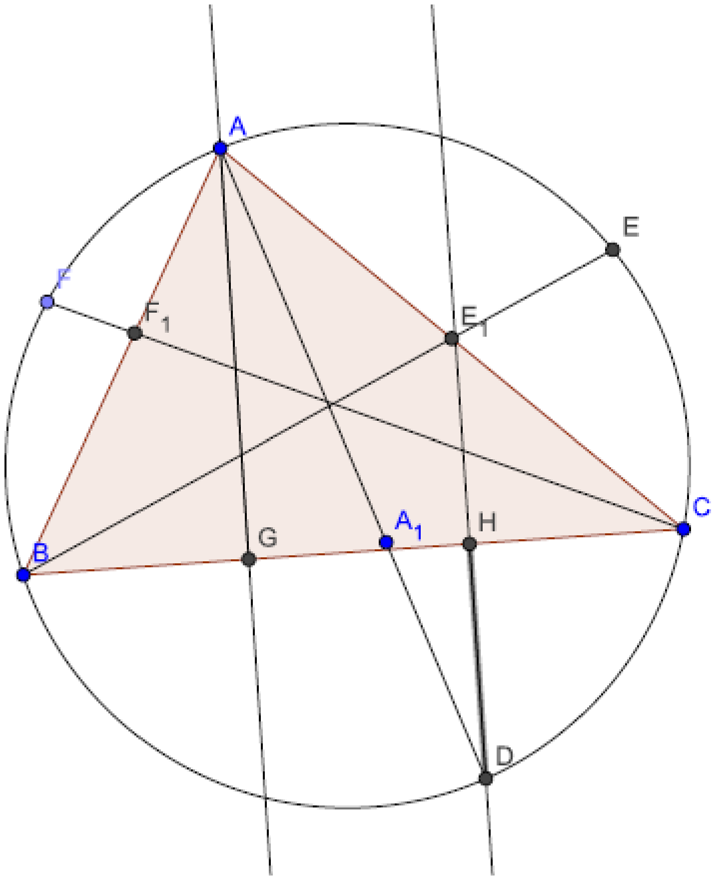
Bibliografie:

1. Ionescu -Țiu Constantin , Aplicații în trigonometrie, Editura Academiei Române, București , 1992
2. Țițeica Gheorghe , Probleme de geometrie …și dincolo de ele, Editura Sigma, București, 2014

5.Două soluții ale unei probleme

Alexandru – Andrei Cioc, elev, Școala Elementară Traian, Pitesti
Daniel Văcaru, profesor, Pitești

Această scurtă notă are ca scop prezentarea unei probleme din lista scurtă a propunerilor pentru Olimpiada Națională de Matematică, 2014.
Problema a fost propusă de prof.Marin Ionescu, Pitești, iar enunțul său arată astfel:
«Fie *ABC* un triunghi și *D*, *E*, *F* punctele în care dreptele suport ale medianelor intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului. Arătați că dacă triunghiurile *BDC*, *CEA*, *AFB* au aceeași arie, atunci triunghiul *ABC* este echilateral.»



Soluția 1. (Alexandru – Andrei Cioc).
Dacă o latură a triunghiului *ABC* este mai mică decât celelalte, atunci arcul de cerc (circumscris) subîntins de aceasta este cel mai mic. Așadar, deducem că înălțimile corespunzătoare triunghiurilor *DBC*, *CEA*, *AFB* sunt în relație corespunzătoare. Prin urmare, aria acelui triunghi va fi cea mai mică. Însă relația de egalitate ne conduce, nu doar intuitiv, către *AB* = *BC* = *CA*.
Soluția 2. (Daniel Văcaru)

Este clar că triunghiurile AGA_1 și DHA_1 sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{AG}{HD} = \frac{AA_1}{DA_1}$. Din datele problemei, deducem că avem egalitatea

$$\frac{S_{BDC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CEA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AFB}}{S_{ABC}}.$$

Dar $\frac{S_{BDC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{BC \cdot DH}{2}}{\frac{BC \cdot AG}{2}} = \frac{DH}{AD} = \frac{DA_1}{AA_1} = \frac{DA_1 \cdot AA_1}{AA_1^2}$.

Puterea punctului A_1 față de cercul circumscris este $DA_1 \cdot A_1A = \frac{a^2}{4}$. Prin inversarea rapoartelor și egalarea acestora, după simplificări, deducem

$$\frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2}$$

Cu proporții derivate, obținem $\frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2} = \frac{m_a^2 + m_a^2 + m_a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Dar $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{4}$, de unde deducem, după prelucrări algebrice, că avem $b^2 + c^2 = 2a^2, c^2 + a^2 = 2b^2, a^2 + b^2 = 2c^2$, adică $a = b = c$.

Bibliografie

[1] Romanian Mathematical Competitions, 2014

6. CÂTEVA IDENTITĂŢI ŞI INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE

Prof. Udma Arleziana Emilia
Colegiul Tehnic "Anghel Saligny", Roșiorii de Vede, Teleorman

1. Să se arate că pentru orice $x \in R$ avem inegalitatea:

$$\sin\left(\sin^2 x\right) + \cos\left(\cos^2 x\right) > \frac{1}{2}$$

Soluţie:

$$E \overset{not}{=} \sin\left(\sin^2 x\right) + \cos\left(\cos^2 x\right) =$$

$$= \sin\left(\sin^2 x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^2 x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\sin^2 x + \frac{\pi}{2} - \cos^2 x}{2}\cos\frac{\sin^2 x - \frac{\pi}{2} + \cos^2 x}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\left.\begin{array}{l} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ 0 < \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \le \frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}} \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow E \ge 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \ge \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos 1.$$

$$0 < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow E > \frac{1}{2}.$$

2. Fie x, y, z $\in$R şi k$\in$Z. Arătaţi că, dacă x+ y+ z = kπ, atunci $\sin^2 2x + \sin^2 2y + \sin^2 2z = 2 - \cos 2x \cos 2y \cos 2z$.

Soluţie:

$\sin^2 2x+\sin^2 2y+\sin^2 2z=(1-\cos 4x)/2+(1-\cos 4y)/2+(1-\cos 4z)/2=$
$=3/2-1/2[(\cos 4x+\cos 4y)+\cos 4z]=$
$=3/2-1/2[2\cos 2(x+y)\cos 2(x-y)+2\cos^2 2z-1]=$
$=2-[\cos 2(x+y)\cos 2(x-y)+\cos^2 2z]$

Cum $x+y+z=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ rezultă că:

$\sin^2 2x+\sin^2 2y+\sin^2 2z=2-[\cos(2k\pi-2z)\cos 2(x-y)+\cos^2 2z]=$
$=2-[\cos 2z\cos 2(x-y)+\cos^2 2z]=$
$=2-[\cos 2(x-y)+\cos 2z]\cos 2z=$
$=2-[\cos 2(x-y)+\cos 2(x+y)]\cos 2z=$
$=2-\cos 2x\cos 2y\cos 2z.$

3. Fie $x, y\in(0, \pi/2)$. Arătaţi că:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin y}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{\cos y}\right)^2=1 \text{ daca si numai daca } x=y.$$

Solutie :

$$\text{Daca } x=y, \text{ atunci } \left(\frac{\sin^2 x}{\sin y}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{\cos y}\right)^2=\sin^2 x+\sin^2 y=1$$

$$\text{Reciproc, daca } \left(\frac{\sin^2 x}{\sin y}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{\cos y}\right)^2=1$$

atunci $\sin^4 x\cos^2 y+\cos^4 x\sin^2 y=\sin^2 y\cos^2 y$, de unde

$\sin^4 x\cos^2 y+(1-\sin^2 x)^2\sin^2 y-\sin^2 y\cos^2 y=0$, adică $(\sin^2 x-\sin^2 y)^2=0$ şi deci $\sin^2 x=\sin^2 y$.

Cum $\sin x>0$, $\sin y>0$ (căci $x, y\in(0, \pi/2)$ rezultă că $\sin x=\sin y$ şi cum funcţia $f: (0, \pi/2)\to(0,1)$, $f(x)=\sin x$ este injectivă, rezultă că $x=y$.

4. Arătaţi că, dacă $0<x<\mathrm{arctg}\,\pi/2$, atunci

$$\frac{x}{\sin(\sin x)}+\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)}{x}>2.$$

<u>Soluţie:</u>

Deoarece $0<x<\mathrm{arctg}\,\pi/2$, iar $\mathrm{arctg}\,\pi/2<\pi/2$, rezultă că $0<x<\pi/2$, ceea ce înseamnă $0<\sin x<x<\pi/2$.

Funcţia sinus este strict crescătoare pe $(0, \pi/2)$, rezultă că $0<\sin(\sin x)<\sin x$ şi, cum $\sin x<x$, rezultă $0<\sin(\sin x)<x$ ceea ce conduce la:

$$\frac{x}{\sin(\sin x)}>1. \qquad (1)$$

Deoarece $0<x<\mathrm{arctg}\,\pi/2<\pi/2$, iar funcţia tg este strict crescătoare pe $(0, \pi/2)$, rezultă că $0<\mathrm{tg}x<\pi/2$ şi cum $x<\mathrm{tg}x$, conchidem că $0<x<\mathrm{tg}x<\pi/2$.

Ca urmare tg(tgx)>tgx şi deci tg(tgx)>x>0 ceea ce ne conduce la:

$\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{tgx})}{x} > 1.$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ inegalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

5. Fie a, b∈R. Arătaţi că inegalitatea sin x+ sina≥b cos x are loc pentru orice x∈R dacă şi numai dacă a=π/2+2kπ (k∈**Z**) şi b=0. (1)

Soluţie:

Dacă a=π/2+2kπ (k∈**Z**) şi b=0, atunci inegalitatea (1) devine: sin x+1≥0, ceea ce are loc pentru orice x∈**R.**

Reciproc, să arătăm că, dacă inegalitatea (1) are loc pentru orice x∈**R**, atunci a=π/2+2kπ (k∈**Z**) şi b=0.

Deoarece inegalitatea (1) trebuie să aibă loc pentru orice x∈**R**, este necesar ca ea să fie îndeplinită pentru x=3π/2, ceea ce ar conduce la –1+sina≥0 sau sina≥1 şi, cum sina≤1 (oricare ar fi a∈**R**), nu putem avea decât sina =1, de unde rezultă că a=π/2+2kπ (k∈**Z**).

Ca urmare inegalitatea (1) devine 1≥b cos x - sinx.

Ţinând seama şi de faptul că valoarea maximă a funcţiei f:**R**→**R**, f(x)=bcosx - sinx este egală cu $\sqrt{b^2+1}$, rezultă că $\sqrt{b^2+1} \le 1$, ceea ce conduce la $b^2 \le 0$, de unde b=0.

6. Fie x, y, z∈R şi k∈Z. Arătaţi că , dacă x+y+z=kπ, atunci cos 2x+cos 2y+cos 2z+1=4(-1)^k cos xcos ycos z.

Soluţie:

Evident, cos 2x+cos 2y+cos 2z+1=2cos(x+y)cos(x-y)+2cos^{2}z şi cum x+y+z=kπ (k∈**Z**), iar sin kπ=0 şi cos kπ=(-1)^k (oricare ar fi k∈**Z**) , rezultă că:

$$\begin{aligned}\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+1 &= 2\cos(k\pi-z)\cos(x-y)+2\cos^2 z=\\ &=2(\cos k\pi\cos z+\sin k\pi\sin z)\cos(x-y)+2\cos^2 z=\\ &=2(-1)^k\cos z\cos(x-y)+2\cos^2 z=\\ &=2[(-1)^k\cos(x-y)+\cos z]\cos z=\\ &=2[(-1)^k\cos(x-y)+\cos(k\pi-(x+y))]\cos z=\\ &=2[(-1)^k\cos(x-y)+(-1)^k\cos(x+y)]\cos z=\\ &=2(-1)^k[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\cos z=\\ &=4(-1)^k\cos x\cos y\cos z.\end{aligned}$$