REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

IULIE 2015

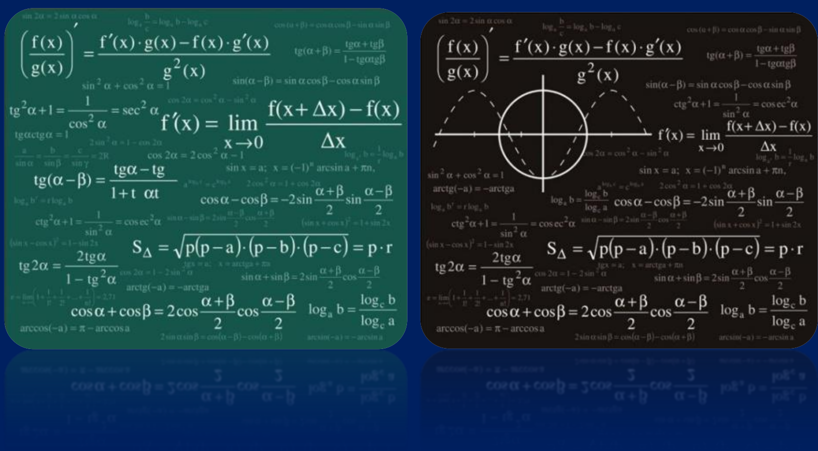
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE!

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

WWW.MATEINFO.RO



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

Articole:

1. În legătură cu o problemă propusă la Olimpiada Europeana de Matematică pentru Fete 2015

de Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Roşiori, Bacău

Ultima problemă propusă la EGMO 2015 are următorul enunț:

Fie H ortocentrul și G centrul de greutate al triunghiului ascuțitunghic ABC, cu AB diferit de AC. Dreapta AG taie cercul circumscris triunghiului ABC în A și P. Fie P' simetricul lui P față de dreapta BC. Demonstrați că <CAB=60⁰ dacă și numai dacă HG=GP'.

În Gazeta Matematică nr. 5/2015 este prezentată soluţia dată în concurs de *Simona Diaconu*, *Maria Romina Ivan* şi *Ioana Teodorescu*. Folosind coordonate complexe, soluţia presupune calcule destul de laborioase.

În aceasta scurtă notă dorim să prezentăm o soluție care presupune și ea destule calcule, dar folosește relații cunoscute intr-un triunghi.

Fie M mijlocul laturii BC. Notăm α=<HAM=<MPP', h înălțimea din A, m=AM, S aria triunghiului ABC. Avem:

$$\cos\alpha = \frac{h}{m},\ m\cdot MP = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MP = \frac{a^2}{4m}, GP = \frac{m}{3} + \frac{a^2}{4m} = \frac{a^2+b^2+c^2}{6m},$$
$$PP' = 2MP\cos\alpha = \frac{a^2h}{2m^2} = \frac{aS}{m^2}.$$

Folosind teorema cosinusului în triunghiul GPP' obținem:

$$P'G^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{36m^2} + \frac{a^2S^2}{m^4} - \frac{2S^2(a^2+b^2+c^2)}{3m^4} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{36m^2} +$$
$$+\frac{S^2(3a^2-2a^2-2b^2-2c^2)}{3m^4} = \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{9m^2}.$$

Deoarece $HO^2 = \dfrac{a^6+b^6+c^6-a^4b^2-a^2b^4-b^4c^2-b^2c^4-a^4c^2-a^2c^4+3a^2b^2c^2}{16S^2}$

si $HG = \frac{2}{3}HO,$ dupa ceva calcule, rezultă că

$$\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2}{m^2}=\frac{4\left(a^6+b^6+c^6-a^4b^2-a^2b^4-b^4c^2-b^2c^4-a^4c^2-a^2c^4+3a^2b^2c^2\right)}{16S^2}$$

$$\Leftrightarrow a^4b^4+a^4c^4-2a^2b^6-2a^2c^6-b^6c^2-b^2c^6-2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4+b^8+c^8=0$$

$$\Leftrightarrow a^4\left(b^2-c^2\right)^2-2a^2\left(b^6+c^6-b^4c^2-b^2c^4\right)+b^6\left(b^2-c^2\right)-c^6\left(b^2-c^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a^4\left(b^2-c^2\right)^2-2a^2\left(b^2+c^2\right)\left(b^2-c^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2\left(b^4+b^2c^2+c^4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)^2-b^2c^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2-c^2+bc\right)\left(a^2-b^2-c^2-bc\right)=0.$$

Cum triunghiul este ascuțitunghic obținem $a^2=b^2+c^2-bc$, deci $A=60^0$.

2. Inegalităţi cu integrale

de prof. Pop Adrian Ioan

Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

1. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-...-\frac{1}{(4n-1)\cdot 4n}<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2<\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-...-\frac{1}{(4n-1)\cdot 4n}+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+2)},\forall n\in \mathbf{N}^*$$

.

Rezolvare:

Se consideră funcţiile

$$f,g\ :\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=arctgx\ -x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{4n-1}}{4n-1},$$
$$g(x)=arctgx\ -x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}-\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-1+x^2-x^4+...+x^{4n-2}=\frac{x^{4n}}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in\mathbf{R}^*\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f strict crescătoare pe $\mathbf{R}\Rightarrow f(x)>f(0)=0,\forall x>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow arctgx\ -x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}>0,\forall x>0\Rightarrow arctgx\ >x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...-\frac{x^{4n-1}}{4n-1},\forall x>0,(1)$$

$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}-1+x^2-x^4+...+x^{4n-2}-x^{4n}=\frac{-x^{4n+2}}{x^2+1}\Rightarrow g'(x)<0,\forall x\in\mathbf{R}^*\Rightarrow$$

$\Rightarrow g$ strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ $g(x)<g(0)=0,\forall x>0\Rightarrow g(x)<0,\forall x>0.$

$$\Rightarrow arctgx \ \text{-}\,x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}-\frac{x^{4n+1}}{4n+1}<0, \forall x>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow arctgx < x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \forall x>0, (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}<arctgx<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \forall x>0 \overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\Rightarrow}$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{5\cdot 6}-...-\frac{x^{4n}}{(4n-1)\cdot 4n}\right)\right|_0^1<\int_0^1 arctgx\,dx<\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{5\cdot 6}-...-\frac{x^{4n}}{(4n-1)\cdot 4n}+\frac{x^{4n+2}}{(4n+1)\cdot(4n+2)}\right)\right|_0^1$$

$$\Rightarrow$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-...-\frac{1}{(4n-1)\cdot 4n}<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2<\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-...-\frac{1}{(4n-1)\cdot 4n}+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+2)}$$

2. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-...-\frac{1}{(4n)!}<\int_0^1 \sin x\,dx<\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-...-\frac{1}{(4n)!}+\frac{1}{(4n+2)!}.$$

Rezolvare:

Considerăm funcţiile

$$f,g : R \to R, f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}-\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

Calculăm $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}...+\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$, $f''(x)=-\sin x+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-..+\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$,

...

$f^{(4n-2)}(x)=-\sin x+x,\ f^{(4n-1)}(x)=-\cos x+1$

Din $f^{(4n-1)}(x)=-\cos x+1>0, \forall x\in R-\{2k\pi | k\in Z\} \Rightarrow f^{(4n-2)}(x)$ este strict crescătoare pe R.

Se demonstrează inductiv că $f^{(k)}(x)$ este strict crescătoare pe $[0,\ \infty)$ $\forall k=\overline{1,4n-2}$

$f''(x) > f''(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $[0,\ \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0,\ \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow$

$$\sin x > x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, \forall x>0 \qquad (1)$$

Analog procedăm pentru funcţia g :

Din $g^{(4n+1)}(x)=\cos x-1<0, \forall x\in R-\{2k\pi | k\in Z\} \Rightarrow g^{(4n)}(x)$ este strict descrescătoare pe **R**. Procedând inductiv se demonstrează că $g^{(k)}(x)$ este strict descrescătoare pe $[0,\ \infty)$ $\forall k=\overline{1,4n}$

$g'(x) < g'(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $[0,\ \infty) \Rightarrow$

$g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow g(x) < 0, \forall x > 0$.

Din $g(x)<0,\ \forall x>0 \Rightarrow$

$$\sin x < x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \forall x>0, \qquad (2).$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},\forall x>0 \overset{\text{prin integrare pe } [0,1]}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-...-\frac{1}{(4n)!}<\int_0^1 \sin x dx<\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-...-\frac{1}{(4n)!}+\frac{1}{(4n+2)!},\forall n\in \mathbf{N}^*.$$

3. Fie $p\in \mathbf{N}^*$ un număr fixat. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+...+x^p}dx$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)$

c) Să se demonstreze inegalitatea $e^{-1}\leq \lim\limits_{n\to\infty}((p+1)\cdot n\cdot I_n)^n\leq e^{p-1}$.

Rezolvare:

a)

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+...+x^p}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+...+x^p}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+...+x^p}dx\leq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

$$I_n+I_{n+1}+I_{n+2}+...+I_{n+p}=\int_0^1 \frac{x^n+x^{n+1}+...+x^{n+p}}{1+x+...+x^p}dx=\int_0^1 \frac{x^n\left(1+x+...+x^p\right)}{1+x+...+x^p}dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

Şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $\Rightarrow$ $I_{n+p}\leq I_{n+p-1}\leq ...\leq I_{n+1}\leq I_n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$I_n+I_{n+1}+I_{n+2}+...+I_{n+p}\leq (p+1)\cdot I_n\Rightarrow \frac{1}{n+1}\leq (p+1)\cdot I_n\Rightarrow \frac{1}{(p+1)(n+1)}\leq I_n,\forall n\in \mathbf{N}^*,(1)$$

Din $I_{n+p}\leq I_{n+p-1}\leq ...\leq I_{n+1}\leq I_n$ $\Rightarrow$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + ... + I_{n+p} \geq (p+1)\cdot I_{n+p} \Rightarrow (p+1)\cdot I_{n+p} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{n+p} \leq \frac{1}{(p+1)(n+1)} \overset{substituim\ \ n\ \ cu\ \ n-p}{\Rightarrow} I_n \leq \frac{1}{(p+1)(n-p+1)}, \forall n \geq p+1, n \in \mathbf{N}^*, (2)$$

Din inegalităţile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{1}{(p+1)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(p+1)(n-p+1)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1$ prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

b) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{1}{(p+1)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(p+1)(n-p+1)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1 \Rightarrow$$

$\frac{n}{(p+1)(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{\mathrm{n}}{(p+1)(n-p+1)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1 \Rightarrow$ prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty}(n\cdot I_n) = \frac{1}{p+1}$.

c) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{n}{(p+1)(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{\mathrm{n}}{(p+1)(n-p+1)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1 \Rightarrow$$

$$\frac{n}{n+1} \leq (p+1)nI_n \leq \frac{\mathrm{n}}{n-p+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1$$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n \leq \left((p+1)\cdot n \cdot I_n\right)^n \leq \left(1 + \frac{\mathrm{p}-1}{n-p+1}\right)^{\mathrm{n}}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{n} \geq \mathrm{p}+1$. Prin trecere la limită obţinem $e^{-1} \leq \lim_{n\to\infty}\left((p+1)\cdot n \cdot I_n\right)^n \leq e^{p-1}$.

Pentru $p = 2015$ se obtine următorul caz particular

4. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^{2015} + x^{2014} + ... + x + 1} dx$.

a) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

b) $\lim_{n\to\infty}(n\cdot I_n)$

c) Să se demonstreze inegalitatea $e^{-1} \le \lim\limits_{n\to\infty}(2016n \cdot I_n)^n \le e^{2014}$.

Rezolvare:

a)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1}dx \le 0 \Rightarrow$$ şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător.

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \ldots + I_{n+2015} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + \ldots + x^{n+2015}}{x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1\right)}{x^{2015}+x^{2014}+\ldots+x+1}dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător $\Rightarrow I_{n+2015} \le I_{n+2014} \le \ldots \le I_{n+1} \le I_n \Rightarrow$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \ldots + I_{n+2015} \le 2016 \cdot I_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le 2016 \cdot I_n \Rightarrow \frac{1}{2016(n+1)} \le I_n, \forall n \in \mathbf{N^*}, (1)$$

Din $I_{n+2015} \le I_{n+2014} \le \ldots \le I_{n+1} \le I_n \Rightarrow$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} + \ldots + I_{n+2015} \ge 2016 \cdot I_{n+2015} \Rightarrow 2016 \cdot I_{n+2015} \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{n+2015} \le \frac{1}{2016(n+1)} \overset{substituim\ \ n\ \ cu\ \ n-2015}{\Rightarrow} I_n \le \frac{1}{2016(n-2014)}, \forall n \ge 2016, n \in \mathbf{N}, (2)$$

Din inegalităţile (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{1}{2016(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2016(n-2014)}, \forall n \in \mathbf{N^*}, n \ge 2016$

prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

d) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{1}{2016(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2016(n-2014)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2016 \Rightarrow$$

$\frac{n}{2016(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2016(n-2014)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2016 \Rightarrow$ prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot I_n) = \frac{1}{2016}$.

e) Conform punctului precedent avem inegalităţile:

$$\frac{n}{2016(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2016(n-2014)}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2016 \Rightarrow$$

$$\frac{n}{n+1} \leq 2016nI_n \leq \frac{n}{n-2014}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2016$$

$\Rightarrow \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \left(2016n \cdot I_n\right)^n \leq \left(1+\frac{2014}{n-2014}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2016$. Prin trecere la limită obţinem $e^{-1} \leq \lim\limits_{n\to\infty}(2016n \cdot I_n)^n \leq e^{2014}$.

3. Inegalitatea lui Gerretsen

Marin Chirciu, Pitești

Inegalitatea lui Gerretsen

Fie triunghiul oarecare ABC cu semiperimetrul p, raza cercului circumscris R și raza cercului înscris r. Există dubla inegalitate:

$$16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$$

Demonstrație:

Se folosește identitatea $HI^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2$. Cum $HI^2\ge 0$, obținem inegalitatea din dreapta, cu egalitate dacă și numai dacă $H\equiv I$, adică pentru triunghiul echilateral.

Se folosește identitatea $GI^2=\frac{1}{9}\left(p^2+5r^2-16Rr\right)$. Cum $GI^2\ge 0$, obținem inegalitatea din stânga, cu egalitate dacă și numai dacă $I\equiv G$, adică pentru triunghiul echilateral.

O dezvoltare a acestei duble inegalități este:

$(2n-5)r^2+(16-n)Rr\le p^2\le(n+4)R^2+(n+4)Rr+(3-6n)r^2$, unde $n\ge 0$.

Demonstrație:

Prima inegalitate $p^2\ge 16Rr-5r^2\overset{(1)}{\ge}(16-n)Rr+(2n-5)r^2$, unde (1) $\Leftrightarrow nRr-2nr^2\ge 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow nr(R-2r)\ge 0$, evident, deoarece $n\ge 0$ și $R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

A doua inegalitate $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\overset{(2)}{\le}(n+4)R^2+(n+4)Rr+(3-6n)r^2$, unde (2) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n\left(R^2+Rr-6r^2\right)\ge 0\Leftrightarrow n(R-2r)(R+3r)\ge 0$, evident, deoarece $n\ge 0$ și $R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind inegalitatea dublă de mai sus.

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile:

1. a) $\sum\cos^2 A\ge\frac{8R-r}{10R}\ge\frac{3}{4}$. b) $\sum\cos^2 A\ge\frac{2\alpha R+(3-4\alpha)r}{2R}$, unde $\alpha\in[0,\ 1]$.

c) $\sum\cos^2 A\ge\frac{2\alpha R+(3-4\alpha)r}{2R}\ge\frac{3}{4}$, unde $\alpha\in[0,\ 1]$ pentru inegalitatea din stânga și $\alpha\ge\frac{3}{4}$ pentru inegalitatea din dreapta.

d) $\sum \cos^2 A \geq \dfrac{2\alpha R+(3-4\alpha)r}{2R} \geq \dfrac{3}{4}$, unde $\alpha \in \left[\dfrac{3}{4},\ 1\right]$.

Dezvoltări

Soluție: a) Inegalitatea din stânga $\Leftrightarrow \dfrac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2} \overset{(1)}{\geq} \dfrac{8R-r}{10R} \overset{Euler}{\geq} \dfrac{3}{4}$, unde (1)$\Leftrightarrow 5p^2 \leq 22R^2+21Rr+5r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $5p^2 \leq 20R^2+20Rr+15r^2 \overset{(2)}{\leq} 22R^2+21Rr+5r^2$, unde (2) $\Leftrightarrow (R-2r)\cdot(2R+5r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler. b) Inegalitatea se scrie $\dfrac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2} \overset{(3)}{\geq} \dfrac{2\alpha R+(3-4\alpha)r}{2R}$, unde (3) $\Leftrightarrow p^2 \leq (6-2\alpha)R^2+(1+4\alpha)Rr+r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2 \overset{(4)}{\leq} (6-2\alpha)R^2+(1+4\alpha)Rr+r^2$, unde (4) $\Leftrightarrow (R-2r)[(2-2\alpha)R+r]\geq 0$, evident din inega-litatea lui Euler și $\alpha \in [0,\ 1]$. c) Din inegalitatea lui Euler pentru $\alpha \geq \dfrac{3}{4}$.

2. a) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{17R+2r}{8R} \leq \dfrac{9}{4}$. b) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R}$, unde $\alpha \geq 2$.

c) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R} \leq \dfrac{9}{4}$, unde $\alpha \geq 2$ pentru inegalitatea din stânga și $\alpha \leq \dfrac{9}{4}$ pentru inegalitatea din dreapta.

d) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R} \leq \dfrac{9}{4}$, unde $\alpha \in \left[2,\ \dfrac{9}{4}\right]$.

e) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R} \leq \dfrac{17R+2r}{8R} \leq \dfrac{9}{4}$, unde $\alpha \geq 2$ pentru prima inegalitate și $\alpha \leq \dfrac{17}{8}$ pentru a doua inegalitate.

f) $\sum \sin^2 A \leq \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R} \leq \dfrac{17R+2r}{8R} \leq \dfrac{9}{4}$, unde $\alpha \in \left[2,\ \dfrac{17}{8}\right]$.

Dezvoltări

Soluție: a) Inegalitatea se scrie $\dfrac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2} \overset{(1)}{\leq} \dfrac{17R+2r}{8R} \overset{Euler}{\leq} \dfrac{9}{4}$, unde (1) $\Leftrightarrow 4p^2 \leq 17R^2+18Rr+4r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $4p^2 \leq 16R^2+16Rr+12r^2 \overset{(2)}{\leq} 17R^2+18Rr+4r^2$, unde (2) $\Leftrightarrow (R-2r)(13R+r)\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler. c) Inegalitatea se scrie $\dfrac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2} \overset{(3)}{\geq} \dfrac{2\alpha R+(9-4\alpha)r}{2R}$, unde (3) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p^2 \leq 2\alpha R^2+(13-4\alpha)Rr+r^2$, adevărată din Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2 \overset{(4)}{\leq} 2\alpha R^2+(13-4\alpha)Rr+r^2$, unde (4) $\Leftrightarrow (R-2r)[(2\alpha-4)R+r]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler și $\alpha \geq 2$. e) Prima inegalitate este adevărată pentru $\alpha \geq 2$. A doua inegalitate adevărată pentru $\alpha \leq \dfrac{17}{8}$, iar a treia inegalitate este adevărată din inegalitatea lui Euler.

3. a) $R-2r\ge\frac{2R}{3}\left(1-\prod\cos\frac{A-B}{2}\right)\ge 0$. b) $9Rr-2r^2\le 4R^2\prod\cos\frac{A-B}{2}\le 4R^2+3Rr-6r^2$.

Octogon 2/2001, M. Bencze

c) $R-nr\ge\frac{2R}{3}\left(\frac{10-3n}{4}-\prod\cos\frac{A-B}{2}\right)\ge(2-n)r$, unde $\frac{4}{3}\le n\le\frac{8}{3}$.

d) $nRr+(16-2n)r^2\le 4R^2\prod\cos\frac{A-B}{2}\le 4R^2+nRr-2nr^2$, unde $-5\le n\le 9$.

Soluție: c) Folosind $\prod\cos\frac{B-C}{2}=\frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}$, (1) inegalitatea din stânga $\Leftrightarrow p^2\ge(8-6n)R^2+(12n-2)Rr- \quad -r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2\overset{(2)}{\ge}(8-6n)R^2+(12n-2)Rr-r^2$,

unde (2) $\Leftrightarrow (R-2r)[(3n-4)R+r]\ge 0$, (inegalitatea lui Euler) şi $n\ge\frac{4}{3}$. Inegalitatea din dreapta $\Leftrightarrow \Leftrightarrow p^2\le 2R^2(10-3n)+(12n-26)Rr-r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\overset{(3)}{\le} \quad \overset{(3)}{\le}2R^2(10-3n)+(12n-26)Rr-r^2$, unde (3) $\Leftrightarrow (R-2r)[(8-3n)R+r]\ge 0$, inegalitatea lui Euler. d) Folosind (1) inegalitatea din stânga $\Leftrightarrow p^2\ge(2n-2)Rr+(31-4n)r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2\overset{(4)}{\ge}(2n-2)Rr+(31-4n)r^2$, unde (4) $\Leftrightarrow (9-n)R\ge 2(9-n)r$, (inegalitatea lui Euler) şi $n\le 9$. Inegalitatea din dreapta $\Leftrightarrow p^2\le 8R^2+(2n-2)Rr-(4n+1)r^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\overset{(5)}{\le}8R^2+(2n-2)Rr-(4n+1)r^2$, unde (5) $\Leftrightarrow (R-2r)[2R+(n+1)r]\ge 0$, evident, din inega-litatea lui Euler.

<u>Obs.</u> Dubla inegalitate este o rafinare a inegalității lui Euler: $4R^2+nRr-2nr^2\ge nRr+(16-2n)r^2\Leftrightarrow 4R^2\ge \quad \ge 16r^2\Leftrightarrow R\ge 2r$ (inegalitatea lui Euler).

4. a) $\left(\frac{r}{2R}\right)^2\le\frac{1}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$. b) $\left(1+\frac{r}{2R}\right)^2\le\frac{25}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$.

c) $\left(2+\frac{r}{2R}\right)^2\le\frac{3}{8}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$. d) $\left(n+\frac{r}{2R}\right)^2\le\frac{(4n+1)^2}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$, unde $0\le n\le 4$.

Soluție: d) Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $\frac{(2nR+r)^2}{4R^2}\le\frac{(4n+1)^2}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}\Leftrightarrow(4n+1)^2p^2\le\left(40n^2+128n+16\right)R^2+$ $+\left(128n^2-152n+8\right)Rr+\left(16n^2+8n-53\right)r^2=E$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+ \quad +3r^2\Leftrightarrow(4n+1)^2p^2\le(4n+1)^2(4R^2+4Rr+3r^2)\overset{(1)}{\le}E$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)\left[\left(-6n^2+24n+3\right)R+(4n^2+2n+ \quad +7)r\right]\ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ şi $-6n^2+24n+3>0$ pentru $n\in[0,\ 4]$. Pentru $n=0,\ 1,\ 2$ se obţin punctele a), b), c).

5. a) $\left(1-\frac{r}{2R}\right)^2\ge\frac{1}{24}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$. b) $\left(2-\frac{r}{2R}\right)^2\ge\frac{49}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$.

c) $\left(n-\frac{r}{2R}\right)^2 \geq \frac{(4n-1)^2}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}$, unde $1\leq n\leq 3$.

Soluție: c) Inegalitatea $\Leftrightarrow \frac{(2nR-r)^2}{4R^2}\geq\frac{(4n-1)^2}{216}\cdot\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2} \Leftrightarrow (4n-1)^2p^2 \geq \left[16(4n-1)^2-216n^2\right]R^2+$ $+\left[8(4n-1)^2+216n\right]Rr+\left[(4n-1)^2-54\right]r^2=E$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (1) $\Rightarrow (4n-1)^2p^2\geq(4n-1)^2(16Rr-5r^2)\overset{(2)}{\geq}E$, unde (2) $\Leftrightarrow (R-2r)\left[\left(-5n^2+16n-2\right)R+(6n^2-3n-3)r\right]\geq 0$, evident din inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ şi $\left(-5n^2+16n-2\right)R+(6n^2-3n-3)r<0$ pentru $1\leq n\leq 3$.

<u>Obs.</u> Pentru $1\leq n\leq 3$ avem $-5n^2+16n-2>0$ şi $6n^2-3n-3\geq 0$. Pentru n = 1, 2 se obţin punctele a), b).

6. a) $\frac{216}{25}\left(1+\frac{r}{2R}\right)^2\leq\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}\leq 24\left(1-\frac{r}{2R}\right)^2$.

b) $\frac{8}{3}\left(2+\frac{r}{2R}\right)^2\leq\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}\leq\frac{216}{49}\left(2-\frac{r}{2R}\right)^2$.

c) $\frac{216}{(4n+1)^2}\left(n+\frac{r}{2R}\right)^2\leq\frac{(4R+r)^2-p^2}{R^2}\leq\frac{216}{(4n-1)^2}\left(n-\frac{r}{2R}\right)^2$, $1\leq n\leq 3$.

Soluție: Vezi **4.** şi **5.** Se obţine o rafinare a inegalităţii lui Euler.

7. a) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{r}\right)^2\geq 30$. b) $\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+n\left(\frac{p}{r}\right)^2\geq 27n+3$, unde $n\geq 0$.

Soluție: b) Folosim inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. Obţinem: $M_s\geq\frac{(4R+r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2}+n\frac{16Rr-5r^2}{r^2}\overset{(1)}{\geq}27n+3=M_d$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)\left[64nR^2+(4+64n)Rr+(4+48n)r^2\right]\geq 0$, evident, din inegalitatea lui Euler. Pentru n = 1 se obține a).

8. a) $\frac{4R+r}{R^2r}\geq\frac{27}{4\left(p^2-12Rr\right)}$. b) $\frac{4R+r}{R^2r}\geq\frac{243-18n}{4\left(p^2-nRr\right)}$, unde $n\in\left[\frac{-13}{2},\frac{27}{2}\right)$.

Soluție: b) Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $4\left(p^2-nRr\right)(4R+r)\geq(243-18n)R^2r$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $4\left(16Rr-5r^2-nRr\right)(4R+r)\overset{(1)}{\geq}(243-18n)R^2r$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)[(2n+13)R+10r]\geq 0$, evident, din inegali-tatea lui Euler. <u>Obs.</u> Pentru $n<\frac{27}{2}$ avem $p^2-nRr>0$. Pentru n = 12 obţinem a).

9. a) $\frac{4R+r}{Rr^2}\geq\frac{27}{2\left(p^2-12Rr\right)}$. b) $\frac{4R+r}{Rr^2}\geq\frac{243-18n}{2\left(p^2-nRr\right)}$, unde $n<\frac{27}{2}$.

Soluție: b) Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $2\left(p^2-nRr\right)(4R+r)\geq(243-18n)Rr^2$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $2\left(16Rr-5r^2-nRr\right)(4R+r)\overset{(1)}{\geq}(243-18n)Rr^2$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)\left[(128-8n)R+5r\right]\geq 0$, evident, din inegali-tatea lui Euler. Pentru n = 12 obţinem a).

10.a) $\frac{4R+r}{Rr}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\geq\frac{81}{4\left(p^2-12Rr\right)}$. b) $\frac{4R+r}{Rr}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\geq\frac{243-18n}{4\left(p^2-nRr\right)}$, unde $n\in\left[\frac{-13}{2},\frac{27}{2}\right)$.

Soluție: a) Se adună inegalitatea **8.** a) cu inegalitatea **9.** a) şi se obţine concluzia. b) Se adună inegalitatea **8.** b) cu inegalitatea **9.** b) şi se obţine concluzia.

11.a) $\frac{1}{r^3}\geq\frac{81}{(4R+r)^3-12p^2R}$. b) $\frac{1}{r^3}\geq\frac{27(27-2n)}{(4R+r)^3-np^2R}$, unde $n\leq 14$.

Soluție: b) Obs. $(4R+r)^3-np^2R>0$ pentru $n\leq 15$. Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $np^2R\leq(4R+r)^3+(54n-729)r^3$, adevă-rată din inegalitatea lui Gerretsen $nR(4R^2+4Rr+3r^2)\overset{(1)}{\leq}(4R+r)^3+(54n-729)r^3$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)[(64-$ $-4n)R^2+(176-12n)Rr+(364-27n)r^2\big]\geq 0$, evident, din inegalitatea lui Euler. $(64-4n)R^2+(176-\;-12n)Rr+(364-27n)r^2>0$ pentru $n\leq$ 14. Pentru n = 12 obţinem a).

12.a) $\frac{r_a^2}{r_a-r}+\frac{r_b^2}{r_b-r}+\frac{r_c^2}{r_c-r}\geq\frac{(4R+r)^2}{2(2R-r)}$. *Octogon Math. Mag.*, *Mihály Bencze*

b) $\frac{r_a^2}{nr_a-r}+\frac{r_b^2}{nr_b-r}+\frac{r_c^2}{nr_c-r}\geq\frac{(4R+r)^2}{4nR+(n-3)r}\geq\frac{27r}{3n-1}$, unde $n\geq 1$.

Soluție: b) $M_s\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum r_a\right)^2}{n\sum r_a-3r}=\frac{(4R+r)^2}{4nR+(n-3)r}\overset{(1)}{\geq}\frac{27r}{3n-1}=M_d$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(12n-4)R^2-(21n+2)Rr+(20-6n)r^2\geq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(R\;-2r[\;)\;(\;1n-2\quad R4+)\;\;n-(\;3$, adevărată din inegalitatea lui Euler. Pentru n = 1 obţinem a).

13.a) $\frac{h_a^2}{h_a-r}+\frac{h_b^2}{h_b-r}+\frac{h_c^2}{h_c-r}\geq\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{2R\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\geq\frac{27r^2}{R}$.

b) $\frac{h_a^2}{nh_a-r}+\frac{h_b^2}{nh_b-r}+\frac{h_c^2}{nh_c-r}\geq\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{2R\left[np^2+nr^2+(4n-6)Rr\right]}\geq\frac{54r^2}{(3n-1)R}$, unde $n\geq\frac{25}{48}$.

Soluție: b) $M_s\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\Sigma h_a\right)^2}{\Sigma\left(nh_a-r\right)}=\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2}{2R\left[np^2+nr^2+(4n-6)Rr\right]}\overset{(1)}{\geq}\frac{54r^2}{(3n-1)R}=M_d$, unde (1) adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $(16Rr-5r^2+r^2+4Rr)^2(3n-1)\overset{(2)}{\geq}108r^2\left[n(4R^2+4Rr+3r^2)+nr^2+(4n-6)Rr\right]$, unde (2) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(R-2r)\left[(96n-50)R+(24n+1)r\right]\geq 0$, adevărată din inegalitatea lui Euler. Pentru n = 1 obţinem a).

14.a) $\frac{R}{R+r}-\frac{36R^2}{11p^2}\leq\frac{2}{11}$. b) $\frac{R}{R+r}-n\cdot\frac{R^2}{p^2}\leq\frac{18-4n}{27}$, unde $n\geq\frac{36}{11}$.

c) $\frac{R}{4R+r}-\frac{12R^2}{35p^2}\le\frac{6}{35}$. d) $\frac{R}{4R+r}-n\cdot\frac{R^2}{p^2}\le\frac{6-4n}{27}$, unde $n\ge\frac{12}{35}$.

Soluție: b) Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $p^2\left[(4n+9)R+(4n-18)r\right]\le 27nR^2(R+r)$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Obţinem $p^2\left[(4n+9)R+(4n-18)r\right]\le\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(4n+9)R+(4n-18)r\right]\overset{(1)}{\le}\ \overset{(1)}{\le} 27nR^2(R+r)$, unde (1) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)\left[(11n-36)R^2+(17n-36)Rr+(6n-27)r^2\right]\ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler şi pentru $n\ge\frac{36}{11}$ avem $(11n-36)R^2+(17n-36)Rr+(6n-27)r^2>0$. Dacă luăm $n=\frac{36}{11}$ obţinem a). d) Inegalitatea $\Leftrightarrow$ $p^2\left[(16n+3)R+(4n-6)r\right]\le 27nR^2(4R+r)$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[(16n+3)R+(4n-6)r\right]\overset{(2)}{\le} 27nR^2(4R+r)$, unde (2) $\Leftrightarrow$ $(R-2r)\left[(44n-12)R^2+(35n-12)Rr+\ +(6n-9)r^2\right]\ge 0$, evident, din inegalitatea lui Euler. Dacă luăm $n=\frac{12}{35}$ obţinem c).

4. CÂTEVA PROBLEME CU INEGALITĂŢI GEOMETRICE DATE LA OLIMPIADELE ŞI CONCURSURILE DE MATEMATICĂ INTERNAȚIONALE

Prof. Dobre Andrei Octavian, Ploiești

1. *Fie triunghiul ABC cu AB=c, AC=b și BC=a. Dacă* $b<\dfrac{a+c}{2}$*, demonstrați că*

$$\mathrm{m}(\sphericalangle B)<\frac{\mathrm{m}(\sphericalangle A)+\mathrm{m}(\sphericalangle C)}{2}.$$

(China, 1990)

Soluție: Folosind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, inegalitatea $\mathrm{m}(\sphericalangle B)<\dfrac{\mathrm{m}(\sphericalangle A)+\mathrm{m}(\sphericalangle C)}{2}$ este echivalentă cu $\mathrm{m}(\sphericalangle B)=60^\circ$. Considerăm triunghiul ABC până la triunghiul isoscel BDE ca în figură. Punctul F este ales astfel încât ADFC să fie paralelogram.
Atunci $\triangle BAC \sim \triangle CEF \Rightarrow EF=AC=FD=b.$
Din $DE<DF+FE=2b<a+c,$ obținem $DE<BE=BD$ și apoi $\mathrm{m}(\sphericalangle B)<\mathrm{m}(\sphericalangle E).$
Atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle B)=180^\circ-2\mathrm{m}(\sphericalangle B),$ adică $\mathrm{m}(\sphericalangle B)=60^\circ.$

2. (Bugaria 1995) Fie S_A, S_B *şi* S_C ariile heptagoanelor regulate $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7, B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ *şi respectiv* $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ Dacă $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_4$, dovediţi că $\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}$

Soluţie:

Fie $a=A_1A_2, b=A_1A_3$ *şi* $c=A_1A_4$
Folosind teorema lui Ptolemeu in patrulaterul $A_1A_3A_4A_5$ deduce că $ab+ac=bc$ care este echivalentă cu $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}=1$ Triunghiurile $A_1A_2A_3$ *şi* $B_1B_2B_3$ sunt asemenea, deci $\dfrac{B_1B_2}{B_1B_3}=\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3}=\dfrac{a}{b}$

şi de aici obţinem $B_1B_2=\dfrac{a^2}{b}$. Analog obţinem $C_1C_2=\dfrac{a^2}{c}$.

$\dfrac{S_B+S_C}{S_A}=\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{a^2c^2+a^2b^2}{b^2c^2}=\dfrac{b^2+c^2}{(b+c)^2}>\dfrac{(b+c)^2}{2(b+c)^2}=\dfrac{1}{2}$ (inegalitatea este strictă dacă $b\neq c$).

Dar $\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}=(\frac{a}{b}+\frac{a}{c})^2-2\frac{a^2}{bc}$

În triunghiul $A_1A_3A_4$ avem:

$$\frac{a^2}{bc}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{2(1-\cos^2\frac{2\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{2(1-\cos\frac{2\pi}{7})(1+\cos\frac{2\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{4\sin^2\frac{\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{4\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})}>$$

$$>\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{4}(1+\cos\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Deci $\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}=1-2\frac{a^2}{bc}<1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}.$

3. *În triunghiul ABC avem $AC>BC$. Pe dreapta AC se consideră un punct M astfel încât $CM=BC; C\in(AM)$. Demonstrați că unghiul $\sphericalangle ABM$ este obtuz.*

(Kiev, 1997)

Soluție Ipoteza $AC>BC$ implică $m(\sphericalangle ABC)>m(\sphericalangle A)$.

$$m(\sphericalangle ABM)=m(\sphericalangle ABC)+m(\sphericalangle CBM)=$$

Atunci $=\frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle ACB)=$

$$=\frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)-\frac{1}{2}m(\sphericalangle A)+90^\circ>90^\circ,$$

Ceea ce trebuie demonstrat.