REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

SEPTEMBRIE 2015

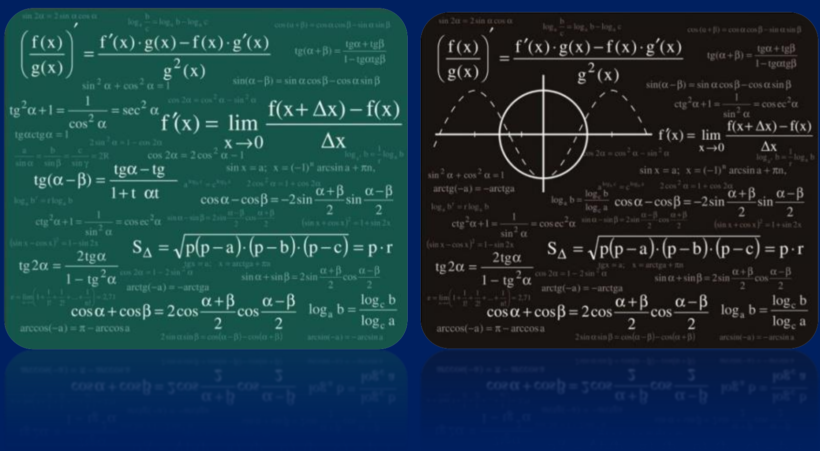
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE!

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

WWW.MATEINFO.RO



Articole:

1. TEHNICI ŞI METODE DE REZOLVARE A UNOR INEGALITĂŢI GEOMETRICE PENTRU ELEVII DE GIMNAZIU

Andrei Octavian Dobre
Colegiul Național "Nichita Stănescu" Ploiești

1.1. INEGALITĂŢI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

În rezolvarea problemelor cu inegalităţi geometrice pot fi utilizate următoarele metode:
1. *Puterea punctului faţă de cerc, relaţia medianei (sau alte relaţii metrice) împreuna cu unele inegalităţi algebrice.*
2. *Se face apel la unele construcţi ajutătoare.*
3. *Se scrie în mai multe moduri aria unui triungi, apoi se ţine seama de unele inegalităţi între laturi.*

DEMONSTRAŢII

Definiţia 1.1.3: Un unghi se numeşte exterior al unui triunghi dacă este adiacent cu unul dintre unghiurile triunghiului şi suplementar cu el.

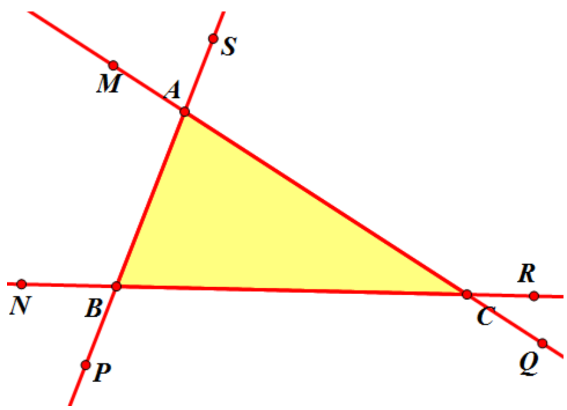


fig. 1

În figura alăturată (BN şi (BC sunt semidrepte opuse, unghiurile $\angle ABC$ şi $\angle ABN$ sunt adiacente şi suplementare, iar $\angle ABC$ este unghi al triunghiului, deci unghiul $\angle ABN$ este unghi exterior triunghiului ABC.
De asemenea, unghiurile $\angle PBC$, $\angle BCQ$, $\angle RCA$, $\angle SAC$, $\angle MAB$ sunt unghiuri exterioare triunghiului ABC.

Teorema 1.1.1: (Teorema unghiului exterior).

Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decât oricare dintre unghiurile triunghiului, neadiacent cu acel unghi.

Demonstraţie:

Fie triunghiul ABC . Unghiurile $\angle MAC$ şi $\angle NAB$ sunt exterioare triunghiului ABC, unde $M \in (BA,\ N \in (CA$.

Se va arăta că: $m(\angle MAC) > m(\angle ACB)$**.**

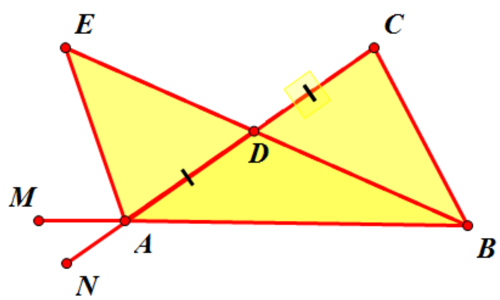


fig. 2

Fie D mijlocul segmentului (AC) şi $E \in (BD$ astfel încât $(BD) \equiv (DE)$.
Punctele E şi M sunt de aceeaşi parte a dreptei AC, iar E şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei AM, deci $E \in Int(\angle CAM)$.Rezultă că: $\angle CAE < \angle CAM$.
Dar $(ED) \equiv (DB)$, $m(\angle EDA) \equiv m(\angle BDC)$ (unghiuri opuse la vârf) şi rezultă că $\Delta ADE \equiv \Delta CDB$ (cazul L.U.L.)
De aici obţinem $m(\angle EAD) = m(\angle BCD)$ şi ţinând cont că $m(\angle EAD) < m(\angle MAC)$, deducem că $m(\angle BCD) < m(\angle MAC)$ adică $m(\angle ACB) < m(\angle MAC)$.

Se va arăta acum că $m(\angle NAB) > m(\angle ABC)$**.**

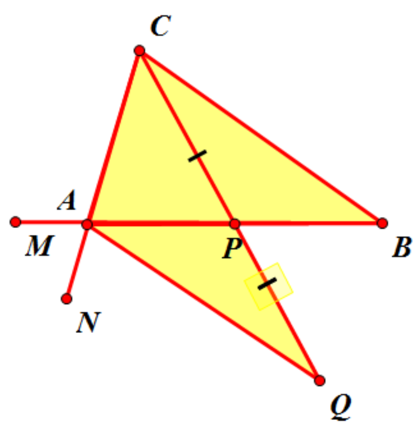


fig. 3

Fie P mijlocul segmentului (AB) şi $Q \in (CP$ astfel încât $(CP) \equiv (PQ)$
Punctele Q şi N sunt de aceeaşi parte a dreptei AB, iar Q şi P de aceeaşi parte a dreptei AN.
Deci $Q \in Int(\angle NAB)$ rezultă că $\angle BAQ < \angle BAN$.
Dar $(AP) \equiv (PB)$, $m(\angle APQ) \equiv m(\angle BPC)$ şi $(PQ) \equiv (CP)$, ceea ce implică congruenţa triunghiului APQ cu triunghiul BPC.

De aici rezultă că $m(\angle PAQ) \equiv m(\angle PBC)$, dar $m(\angle PAQ) < m(\angle PAN)$, prin urmare avem $m(\angle PBC) < m(\angle PAN)$, adică $m(\angle ABC) < m(\angle BAN)$.
Cum $m(\angle MAC) \equiv m(\angle NAB)$ (opuse la vârf) obţinem $m(\angle MAC) > m(\angle ABC)$. Deci am demonstrat că $\angle MAC > \angle ACB$ şi $\angle MAC > \angle ABC$.

Teorema 1.1.2: *Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare şi se opune unghiul cu măsura cea mai mare.*

Demonstraţie:

Fie triunghiul ABC cu AC>AB
Se consideră punctul $D \in (AC)$ astfel încât $(AD) \equiv (AB)$. Atunci triunghiul ABD este triunghi isoscel şi $\angle ABD \equiv \angle ADB$.
Dar $\angle ADB$ este unghi exterior triunghiului BDC şi folosind teorema I.1.1 obţinem că $\angle ADB > \angle DCB$. Rezultă că $\angle ABD > \angle ACB$,
iar cum $D \in (CA)$ avem $D \in Int(\angle ABC)$ şi deci $\angle ABD > \angle ABC$.
Prin urmare, $\angle ABC > \angle ABD \equiv \angle ADB > \angle DCB \equiv \angle ACB$,
ceea ce implică $\angle ABC > \angle ACB$.

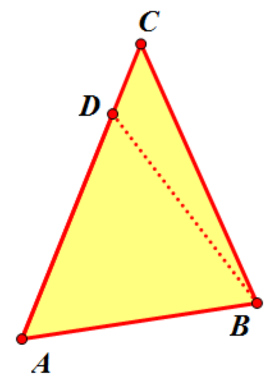


fig. 4

Teorema 1.1.3: *Într-un triunghi cu două unghiuri necongruente, unghiului cu măsura mai mare i se opune latura cu lungimea mai mare.*

Demonstraţie:

Fie triunghiul ABC cu $m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$
Se va demonstra că AC>AB.
Considerăm punctul $D \in (AC$ astfel încât $(AD) \equiv (AB)$. Deci triunghiul ABD este isoscel, de unde rezultă că $m(\angle ABD) = m(\angle ADB)$.
Dar $m(\angle ABD) = [180^0 - m(\angle BAC)]/2 =$
$= \left[m(\angle ABC) + m(\angle ACB)\right]/2 <$
$\left[m(\angle ABC) + m(\angle ABC)\right]/2 = m(\angle ABC)$.
Deci $m(\angle ABD) < m(\angle ABC)$. Prin urmare, $D \in (AC)$, ceea ce implică AD<AC şi cum $(AD) \equiv (AB)$, obţinem AB<AC.

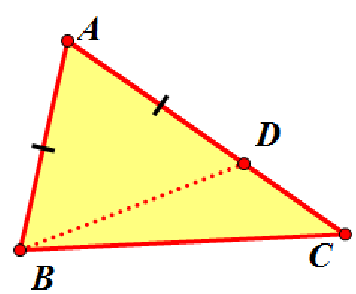


fig. 5

Observaţie: În demonstraţie s-a ţinut cont că în triunghiul ABC avem $m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle CAB) = 180^0$ şi $m(\angle BAC) = m(\angle BAD)$.

Teorema 1.1.4: *Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decât lungimea oricărei catete.*

Demonstraţie:

Fie triunghiul ABC în care $m(\angle BAC)=90^0$
Cum $m(\angle BAC)>m(\angle ABC)$ ţinând cont de teorema I.1.3 obţinem BC>AB şi BC>AC.

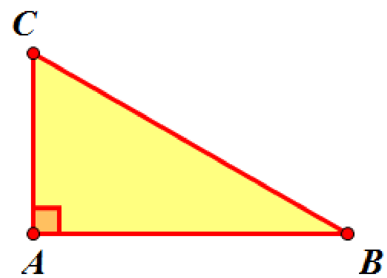


fig. 6

Teorema 1.1.5: *Fie o dreaptă d inclusă într-un plan α şi un punct $M\in\alpha$ astfel încât $M\notin d$. Dacă notăm cu M' proiecţia punctului M pe dreapta d atunci pentru orice $A\in d,\ A\neq M'$ are loc relaţia $MM'<MA$.*

Demonstraţie:

Fie $d\subset\alpha$ şi $M\in\alpha$, astfel încât $M\neq d,\ M'\in d$ astfel încât $MM'\perp d$ şi $A\in d,\ A\neq M'$.
Se formează triunghiul dreptunghic $MM'A$ cu $m(\angle MM'A)=90^0$ Conform teoremei I.1.4, obţinem $MM'<MA$.

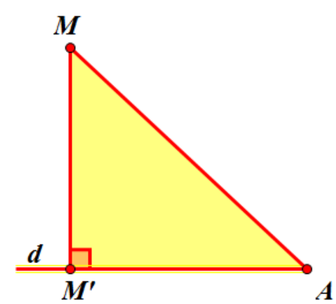


fig. 7

Definiţie : *Se numeşte distanţa de la un punct la o dreaptă, căreia nu îi aparţine, cea mai mică distanţă dintre acel punct şi punctele dreptei.*

Observaţie: Din cele de mai sus rezultă că distanţa de la un punct la o dreaptă este distanţa dintre acel punct şi piciorul perpendicularei duse din acel punct la acea dreaptă şi se notează:
$d(M;h)=\min MP=MM'$ unde $M\in\alpha;\ \ M\notin h\subset\alpha$ şi $M'\in h,$ astfel încât $MM'\perp h$.

Teorema 1.1.6: *Dintre două oblice duse dintr-un punct pe aceeaşi dreaptă, cea mai îndepărtată de piciorul perpendicularei duse din acel punct are lungimea cea mai mare.*

Demonstraţie:

Fie o dreaptă d inclusă într-un plan α, $M\in\alpha,\ M\notin d,\ M'\in d$ astfel încât $MM'\perp d$ şi $A,B\in d$.

Cazul a): A se află între $M^{'}$ şi B
Deoarece $\angle MAB$ este unghi exterior
$\Delta MM^{'}A$ avem: $m(\angle MAB) = m(\angle MM^{'}A) + m(\angle M^{'}MA)$.
Prin urmare, $m(\angle MAB) > 90^0$ şi în
ΔMAB, $m(\angle MAB) > m(\angle MBA)$ şi utilizând
teorema I.1.3 obţinem MB>MA.

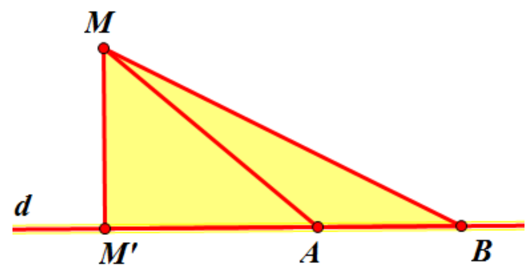


fig. 8

Cazul b): $M^{'}$ se află între A şi B
Considerăm cazul în care $AM^{'} < M^{'}B$. Fie $A^{'} \in (M^{'}B)$
astfel încât $(MA^{'}) \equiv (MA)$.
Triunghiurile $MM^{'}A^{'}$; $MM^{'}A$ sunt triunghiuri
congruente şi deci $(M^{'}A) \equiv (M^{'}A^{'})$. Utilizând cazul a)
obţinem: $MA^{'} < MB$.

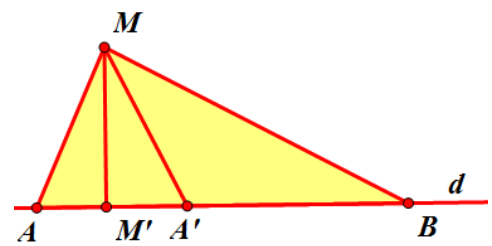


fig. 9

Teorema 1.1.7: *Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de-a treia laturi.*

Demonstraţie:

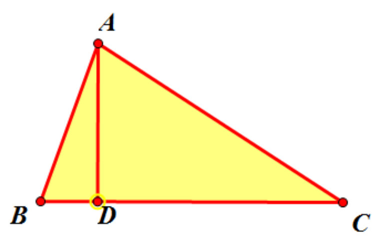


fig. 10

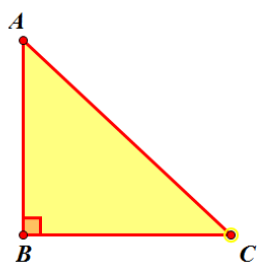


fig. 11

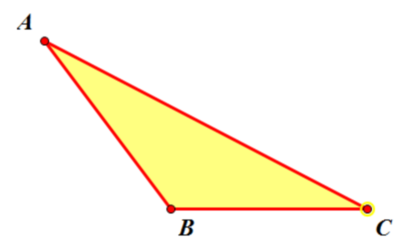


fig. 12

Cazul 1. Fie triunghiul ABC şi $D \in BC$ astfel încât $AD \perp BC$. Presupunem că $\angle ABC$ şi $\angle ACB$ sunt unghiuri ascuţite (fig.10).
Prin urmare, punctul $D \in BC$, astfel încât $AD \perp BC$. În triunghiul ADB, $m(\angle ADB) = 90^0$, iar în triunghiul ADC, $m(\angle ADC) = 90^0$, utilizând teorema I.1.3, deducem că $BD < AB$ şi $DC < AC$, ceea ce implică: $BD + DC < AB + AC$, adică $BC < AB + AC$.

Cazul 2. Presupunem că $m(\angle ABC) = 90^0$ (fig.11). Ţinând cont de teorema I.1.3 avem $BC < AC$ în triunghiul ABC. Prin urmare $BC < AC + AB$.

Cazul 3. Presupunem că $m(\angle ABC) > 90^0$, (fig.12). Utilizând teorema I.1.3, obţinem $BC < AC$ şi, deci $BC < AC + AB$.

Teorema 1.1.8: *Se consideră triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ astfel încât $(AB) \equiv (A'B')$ şi $(AC) \equiv (A'C')$. În aceste condiţii, dacă $m(\angle BAC) > m(\angle B'A'C')$, atunci $BC > B'C'$.*

Demonstraţie:

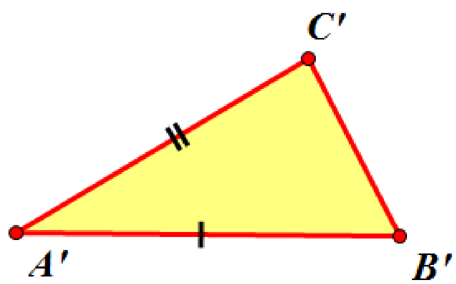


fig. 13

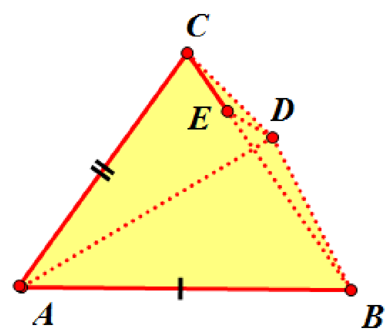


fig. 14

Construim punctul D în semiplanul lui C, faţă de AB, astfel încât triunghiurile $A'B'C'$ şi ABD să fie congruente (cazul L.L.L.: $(AB) \equiv (A'B')$, $(AD) \equiv (A'C')$, (BD) $\equiv (B'C')$)

Din ipoteză $(AC) \equiv (A'C')$ de unde rezultă că triunghiul ACD este isoscel $(AC) \equiv (AD)$ şi $(AD \subset Int(\angle BAC)$. Deci şi bisectoarea $\angle CAD$ va fi situată în interiorul unghiului $\angle BAC$. Prin urmare, aceasta va intersecta segmentul (BC) într-un punct E şi $(EC) \equiv (ED)$. Rezultă că $BC = BE + EC = BE + ED$, dar în triunghiul BED avem $BE + ED > BD$, conform teoremei I.1.7 şi deci $BC > BD = B'C'$, de unde obţinem $BC > B'C'$.

Corolar 1.1.8: *Dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au $(AB) \equiv (A'B')$; $(AC) \equiv (A'C')$ şi $(BC) > (B'C')$ atunci $m(\angle BAC) > m(\angle B'A'C')$.*

Demonstraţie:

Presupunem, prin absurd, că în condiţIle din ipoteză vom avea $m(\angle BAC) \le m(\angle B'A'C')$.

Cazul 1. Dacă $m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C')$, ţinând cont că $(AB) \equiv (A'B')$ şi $(AC) \equiv (A'C')$, deducem că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente, de unde $(BC) \equiv (B'C')$, ceea ce contrazice ipoteza.

Cazul 2. Dacă $m(\angle BAC) < m(\angle B'A'C')$ şi având în vedere faptul că $(AB) \equiv (A'B')$, iar $(AC) \equiv (A'C')$, conform teoremei I.1.7 obţinem $BC < B'C'$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, rămâne adevărată doar situaţia $m(\angle BAC) > m(\angle B'A'C')$.

1.2.INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN TRIUNGHI

P.1.2.1. *Să se demonstreze că, o mediană a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor ală turate cu ea.*

Soluţie:

Fie triunghiul ABC şi mediana AA' ; prelungim aceasta mediană cu o lungime $[A'A''] \equiv [AA']$
Se demonstrează, uşor, congruenţa triunghiurilor *ABA' si CA'A"* (cazul de congruenta , latura , unghi latura), de unde rezulta $[AB] \equiv [CA'']$.

În triunghiul *ACA"* avem $[AA''] < [AC] + [CA'']$ şi, cum $[A'A''] \equiv [AA'']$, rezultă că $AA' < \frac{AB+AC}{2}$

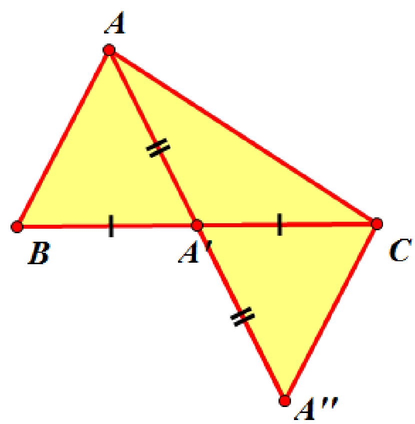


fig.15

P.1.2.2.*Fie triunghiul ABC, in care* $m\angle(\mathrm{BAC}) > m\angle(ABC) + m\angle(ACB)$ *şi fie D mijlocul segmentului [BC].Să se arate că* $AD < \frac{BC}{2}$.

Soluţie:

$$Ávem\, m\angle(BAC) = m\angle(BAD) + m\angle(DAC) >$$
$$> m\angle(ABC) + m\angle(ACB), din\, ipoteză$$

De aici rezultă ca

$$m\angle(BAD) > m\angle(ABC), de\, unde\, BD \geq AD\, sau$$
$$m\angle(DAC) > m\angle(ACB), de\, unde\, DC > AD.$$
$$Din\, BD > AD\, şi\, DC > AD, \text{adunându}-\text{le},$$
$$\text{se obţine AD} < \frac{BC}{2}$$

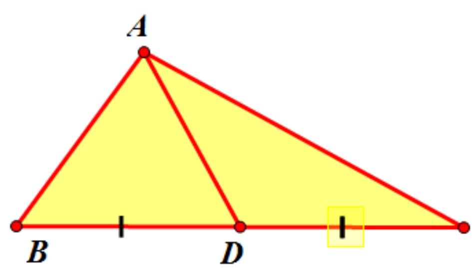


fig.
16

P.1.2.3.Două triunghiuri sunt asezate astfel încât au o latură comună, iar alte două laturi se intersectează.Să se demonstreze că, suma lungimilor laturilor care se intersectează este mai mare decât suma lungimilor laturilor care nu se intersectează.

Soluţie:

Fie AC latura comuna triunghiurilor ABC si ADC şi, fie E punctul de intersecţie al laturilor AD si BC.Din triunghiurile AEB si CDE, rezultă, respectiv, că $AE + BE > AB$ şi $EC + ED > CD$, care, adunate membru cu membru, şi ţinând seama ca $AE + ED = AD$, iar $BE + EC = BC$, conduc la $AD + BC > AB + CD$.

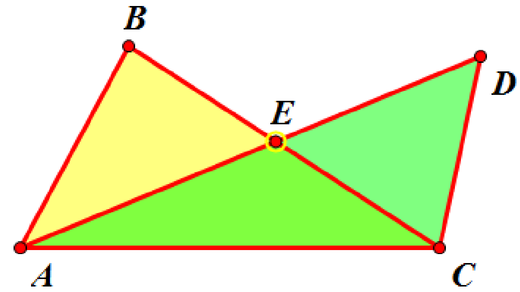


fig. 17

P.1.2.4.Fie triunghiul ABC şi M,N două puncte astfel încât $B \in (MC)$ şi $C \in (BN)$. Să se demonstreze că: $m(\angle MAN) < m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$.

Soluţie:

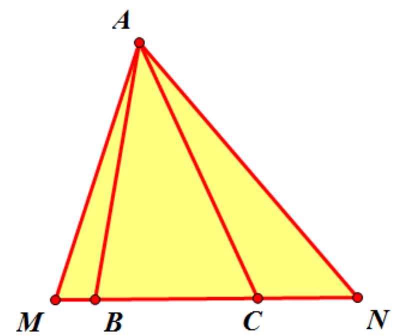


fig. 18

Fie triunghiul ABC şi punctele M şi $N \in BC$, astfel încât $B \in (MC)$ şi $C \in (BN)$

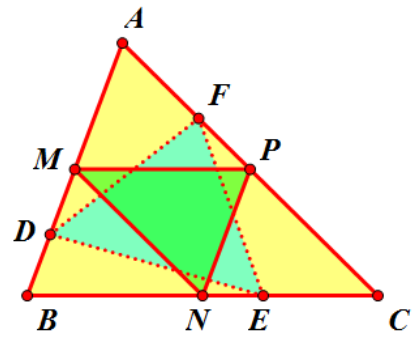
În această situaţie $\angle ABC$ este unghi exterior triunghiului ABM, $\angle ACB$ este unghi exterior triunghiului ACN.

Conform teoremei unghiului exterior, $m(\angle ABC) > m(\angle MAB)$, $m(\angle ACB) > m(\angle NAC)$.
Deci: $m(\angle MAN) = m(\angle MAB) + m(\angle BAC) + m(\angle CAN) <$
$< m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$

P.1.2.5.(Problema 0.110 G.M. nr.10/1980): În triunghiul ABC notăm cu M,N,P mijloacele laturilor (AB), (BC), (CA) şi fie $D \in [MB]$, $E \in [NC]$, şi $F \in [PA]$. Să se demonstreze că: $S_{[DEF]} \geq S_{[MPN]}$.

Soluţie:

fig. 19



Fie triunghiul ABC şi M,N,P mijloacele laturilor (AB), (BC), (CA), iar $D \in [MB]$, $E \in [NC]$, şi $F \in [PA]$ (fig.II.5.1). Considerăm $AD = xAB$; $BE = yBC$; $CF = zAC$, evident $x, y, z \in [1/2,1]$.

$$\frac{S_{[ADF]}}{S_{[ABC]}} = \frac{(1/2)AD \cdot AF \cdot \sin(\angle A)}{(1/2)AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)} = \frac{AD \cdot AF}{AB \cdot AC} = x(1-y).$$

În mod analog: $\frac{S_{[BED]}}{S_{[ABC]}} = y(1-x)$, iar $\frac{S_{[CFE]}}{S_{[ABC]}} = z(1-y)$.

Cum $x, y, z \in [1/2,1]$ avem:

$(x-1/2)(y-1/2)+(y-1/2)(z-1/2)\cdot(x-1/2) \geq 0$

ceea ce implică:

$xy-(1/2)(x+y)+1/4+yz-(1/2)(y+z)+1/4+zx-(1/2)(z+x)+1/4 \geq 0$ şi, deci

$xy+yz+zx-(1/2)[(x+y)+(y+z)+(z+x)]+3/4 \geq 0$, de unde rezultă:

$xy+yz+zx-(x+y+z)+3/4 \geq 0$ şi prin urmare $(x+y+z)-(xy+yz+zx) \leq 3/4$. Notăm cu $\alpha = (S_{[ADE]}+S_{[BED]}+S_{[CFE]})/S_{[ABC]}$, obţinem: $\alpha = x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) = (x+y+z)-$
$-(xy+yz+zx)$ şi deci $\alpha \leq 3/4$.

Pe de altă parte,

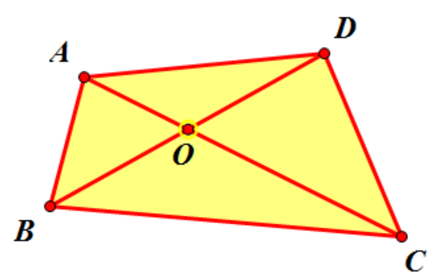
$$(S_{[AMP]}+S_{[BMN]}+S_{[CPN]})/S_{[ABC]} =$$
$$\frac{AM \cdot AP \cdot \sin(\angle A)}{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)} + \frac{BM \cdot BN \cdot \sin(\angle B)}{BA \cdot BC \cdot \sin(\angle B)} + \frac{CP \cdot CN \cdot \sin(\angle C)}{CA \cdot CB \cdot \sin(\angle C)} =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ şi cum $S_{[MPN]} = (1/4)S_{[ABC]}$, iar $S_{[DEF]} = (1-\alpha)S_{[ABC]}$, având în vedere cele de mai sus, $S_{[DEF]} \geq S_{[MNP]}$.

1.3. INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN PATRULATERE

P.1.3.1. Dacă în patrulaterul convex ABCD, are loc inegalitatea AB + BD < AC + CD, atunci AB < AC.

Soluţie:



Din triunghiurile AOD si BOC se obţine că AD < AO + OD şi, respectiv BC < BO + OC care, adunate, conduc la AD + BC < AC + BD.
Din AB + BD < AC + CD (prin ipoteză) şi din AD + BC < AC + BD, prin adunarea membru cu membru, se obţine inegalitatea cerută.

fig. 20

P.1.3.2. *Să se demonstreze că, dacă într-un patrulater convex două unghiuri opuse sunt obtuze, atunci lungimea diagonalei determinată de vârfurile celor două unghiuri este mai mică decât lungimea celeilalte diagonal.*

Soluţie:

În triunghiul DAB, avem m$\angle$(DAB) > m$\angle$ (ADB) + m$\angle$(ABD). Fie M, astfel încât DM = BM; atunci, AM $< \frac{BD}{2}$. La fel, $CM < \frac{BD}{2}$.

Atunci, AM + CM < BD. În triunghiul AMC, are loc AC < AM + CM.

Din aceste ultime doua inegalitati rezulta AC < BD.

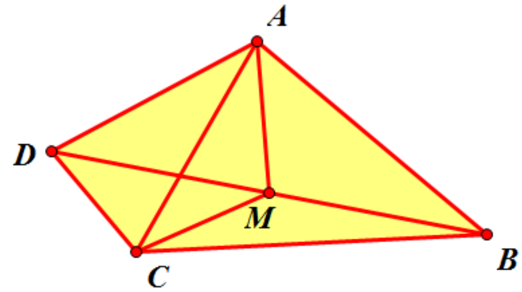


fig. 21

P.1.3.3. *Fie patrulaterul convex ABCD, în care AD este latura cea mai lungă, iar BC cea mai scurtă. Să se arate că, atunci $\angle ABC > \angle ADC$ şi $\angle BCD > \angle BAD$.*

Soluţie:

Cum AD este latura cea mai lungă, din triunghiul ABD avem că AD > AB, de unde $\angle$ABD > $\angle$ADB. La fel, cum BC este latura cea mai scurtă, din triunghiul BCD rezultă $\angle$DBC > $\angle$BDC, urmează că $\angle$ABC > $\angle$ADC. Analog, se obţine a doua inegalitate.

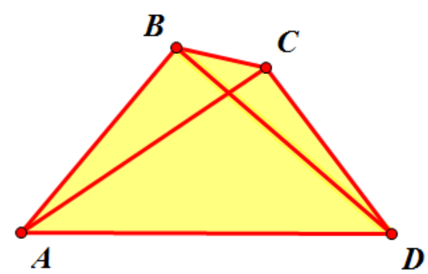


fig. 22

P.1.3.4. *Sa se demonstreze că, intr-un trapez suma laturilor neparalele este mai mare decât diferenţa bazelor.*

Soluţie:

Fie trapezul ABCD, cu baza mica AB si baza mare CD. Ducem paralela BB' la latura AD, punctul B' fiind pe baza mare, apoi observăm că în triunghiul BB'C latura B'C este diferenţa bazelor.

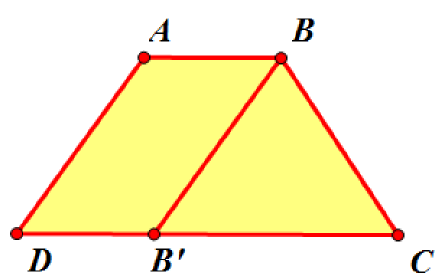
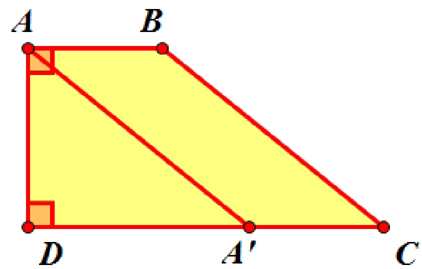


fig. 23

P.1.3.5. *Să se demonstreze că intr-un trapez dreptunghic latura oblică este mai mare decât diferenţa bazelor.*

Soluţie:
Fie trapezul dreptunghic ABCD, cu baza mica AB şi baza mare CD. Ducem paralela AA', la latura oblica BC, punctual A' fiind pe baza mare CD, apoi observam ca, DA' este diferenta bazelor, iar BC = AA'.

fig. 24



1.4. INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN CERC

P.1.4.1. *(Inegalitatea lui Euler): Fie C(O;R) şi C(I;r) cercul circumscris şi respectiv cercul înscris triunghiului ABC; Atunci are loc inegalitatea:* $R \geq 2r$

Soluţie:
Vom demonstra mai întâi relaţia lui Euler:
$OI^2 = R^2 - 2rR$
Fie $\{D\} = (AI \cap C(O;R))$
$\{E, F\} = OI \cap C(O;R)$
În triunghiul ABD din teorema sinusurilor rezultă $BD = 2\sin(\angle A/2)$ (1)
iar din triunghiul AIN, $m(\angle ANI) = 90^0$
avem $\sin(\angle A/2) = \dfrac{NI}{AI}$ deci :

$$AI = \frac{NI}{\sin(\angle A/2)} = \frac{r}{\sin(\angle A/2)} \quad (2)$$

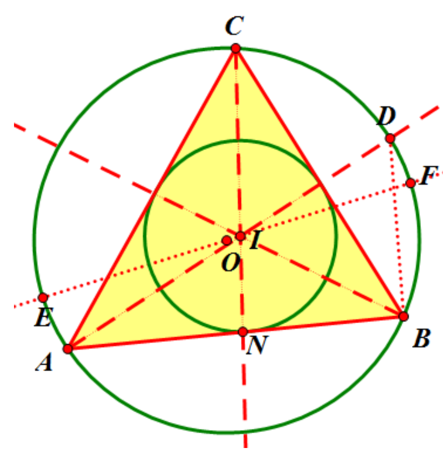


fig. 25

Ţinând cont că unghiul BID este unghi exterior triunghiului ABI deducem că:
$m(\angle BID) = m(\angle A/2) + m(\angle B/2) = m(\angle CBD) + m(\angle B/2) = m(\angle IBD)$ ceea ce conduce la concluzia că triunghiul BID este isoscel şi deci $[BD] \equiv [ID]$ (3)

Folosind puterea punctului I faţă de cercul C(O;R) şi relaţiile (1),(2),(3) obţinem
$IE \cdot IF = ID \cdot IA = BD \cdot IA = 2R \cdot \sin(\angle A/2) \cdot r / \sin(\angle A/2) = 2rR$.

Pe de altă parte $IE \cdot IF = (R - OI)(R + OI) = R^2 - OI^2$. Deducem că: $R^2 - OI^2 = 2rR$, adică $UI^2 \equiv R^2 - 2rR$. Inegalitatea se obţine observând că $OI^2 \geq 0$, de unde $R^2 - 2rR \geq 0$, ceea ce conduce la $R \geq 2r$, cu egalitate în cazul triunghiului echilateral.

P.1.4.2. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $S > 2r\sqrt{rR}$

Soluţie:

Fie triunghiul ABC, C(O;R)

C(I;r)

Avem $h_a > 2r$; $h_b > 2r$; $h_c > 2r$

, sau $2Rh_a > 4rR,\ 2Rh_b > 4rR,\ 2Rh_c > 4rR$ (*)

Pe de altă parte : $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$,

deducem că $\frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}$, ceea ce implică

2Rh$_a$=bc. În mod analog 2Rh$_b$=ac, 2Rh$_c$=ac,

de unde având în vedere relaţia (*) rezulta

ca bc >4rR, ac>4rR, ab >4rR iar in continuare

obţinem: $(abc)^2 > (4rR)^2 \Leftrightarrow abc > 8\sqrt[3]{(rR)^2}$,

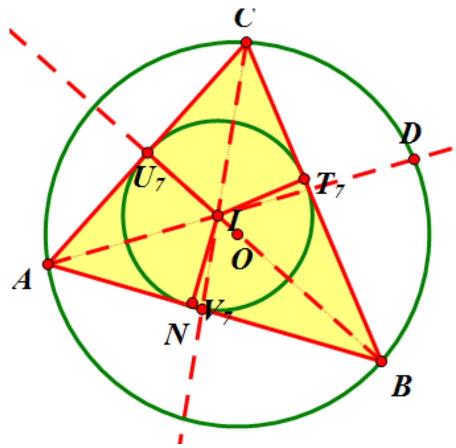


fig. 26

dar abc=4RS si prin urmare $4\text{RS} > 8\sqrt[3]{(rR)^2}$, adică

$S > 2r\sqrt{rR}$.

P.1.4.3. Să se demonstreze că în triunghiul ABC are loc inegalitatea: $6rR \le \sqrt[3]{(abc)^2}$

Soluţie:

Observăm mai întâi că abc=4RS=4Rpr(a+b+c) ceea ce conduce la: $\frac{rR(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{2}$, adică

$\frac{rR}{ab} + \frac{rR}{bc} + \frac{rR}{ca} = \frac{1}{2}$. Din inegalitatea mediilor rezultă că: $\frac{rR}{ab} + \frac{rR}{bc} + \frac{rR}{ca} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(rR)^3}{(abc)^2}}$ care este

echivalentă cu: $\frac{1}{2} \ge \frac{3rR}{\sqrt[3]{(abc)^2}}$ adică $6rR \le \sqrt[3]{(abc)^2}$.

Egalitatea are loc în cazul triunghiului echilateral.

1.5. INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN POLIEDRE

P.1.5.1. *Demonstrați că în orice tetraedru suma bimedianelor sale este mai mică decât semisuma muchiilor sale.*

Soluție:

În figura alăturată, M,N,P,Q,R și S reprezintă mijloacele muchiilor tetraedrului ABCD. În triunghiul MNP, avem $MN < MP + PN$. Dar $MP = \frac{AC}{2}$ și $PN = \frac{BD}{2}$.

Obținem $MN < \frac{AC + BD}{2}$.

Analog, obținem și $PQ < \frac{AB + CD}{2}$ și $RS < \frac{BC + AD}{2}$.

Adunăm cele trei inegalități și obținem concluzia.

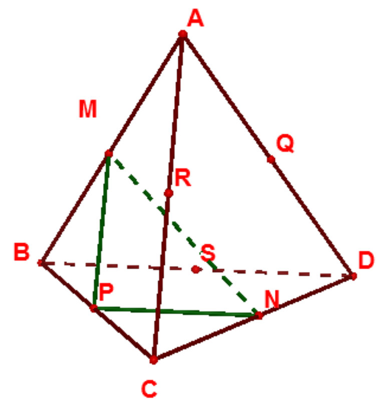


fig. 27

P.1.5.2. Fie VABCD o piramidă triunghiulară. Demonstrați că: $\sqrt{\mathcal{A}_{VAB}} + \sqrt{\mathcal{A}_{VBC}} + \sqrt{\mathcal{A}_{VCA}} \le \frac{VA + VB + VC}{2}$.

Soluție:

Au loc relațiile $\mathcal{A}_{VAB} = \frac{VA \cdot VB \cdot \sin\left(\sphericalangle AVB\right)}{2} \le \frac{VA \cdot VB}{2}$,

deci $\sqrt{\mathcal{A}_{VAB}} \le \sqrt{\frac{VA \cdot VB}{2}}$.

Folosind inegalitatea mediilor, deducem $\sqrt{\mathcal{A}_{VAB}} \le \frac{VA + VB}{2\sqrt{2}}$.

Scriem și inegalitățile analoage, iar prin însumare obținem concluzia.

P.1.5.3. Considerau tetraedrul SABC, $SA \perp SB \perp SC \perp SA$ și $M \in \left(ABC\right)$. Fie $MD \perp \left(SBC\right), ME \perp \left(SAC\right), MF \perp \left(SAB\right)$. Demonstrați că $\frac{SA}{MD} + \frac{SB}{ME} + \frac{SC}{MF} \ge 9$.

Soluție:

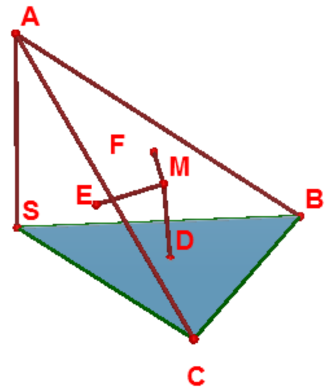


fig. 28

Din

$$\mathcal{V}_{SABC}=\mathcal{V}_{MSAB}+\mathcal{V}_{MSBC}+\mathcal{V}_{MSAC}\Rightarrow\frac{\mathcal{V}_{MSAB}}{\mathcal{V}_{SABC}}+\frac{\mathcal{V}_{MSBC}}{\mathcal{V}_{SABC}}+\frac{\mathcal{V}_{MSAC}}{\mathcal{V}_{SABC}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{MD}{SA}+\frac{ME}{SB}+\frac{MF}{SC}=1.$$

Atunci avem

$\left(\frac{SA}{MD}+\frac{SB}{ME}+\frac{SC}{MF}\right)\left(\frac{MD}{SA}+\frac{ME}{SB}+\frac{MF}{SC}\right)\geq 9$ și de aici obținem concluzia.

P.1.5.4. Două plane α,β sunt înțepate de dreapta d în punctele A, B. Determinați un punct M pe segmentul [AB] pentru care suma distanțelor de la M la cele două plane este minimă.

Soluție: Considerăm C, respectiv D proiecțiile lui A, respectiv B pe β, respectiv α. Fie N,P proiecțiile lui. Din teorema fundamentală a asemănării avem $\frac{MP}{BD}=\frac{AM}{AB}$ și $\frac{MN}{AC}=\frac{MB}{AB}$.

Atunci $MN+MP=\frac{AM\cdot BD+MB\cdot AC}{AB}=\frac{BD(AB-MB)+MB\cdot AC}{AB}=$

$$=\frac{MB\cdot(AC-BD)+BD\cdot AB}{AB}=\frac{AC-BD}{AB}MB+BD.$$

Atunci deducem că avem două cazuri. Dacă $AC>BD,$ suma din enunț este minimă pentru M=B, iar dacă $AC<BD,$ atunci suma este minimă pentru M=A.

P.1.5.4. Demonstrați că în orice tetraedru ABCD are loc inegalitatea $\frac{AB}{CD}+\frac{AC}{BD}+\frac{AD}{BC}>\frac{3}{2}.$

Soluție:

Din $CD<AD+AC, BD<AB+AD, BC<AB+AC$ rezultă

$\frac{AB}{CD}+\frac{AC}{BD}+\frac{AD}{BC}>\frac{AB}{AD+AC}+\frac{AC}{AB+AD}+\frac{AD}{AB+AC}\geq\frac{3}{2}$, care se probează, de exemplu, în felul următor:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{xy+yz}+\frac{z^2}{xz+yz}\geq\frac{(x+y+z)}{2(xy+xz+yz)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)}{2(xy+xz+yz)}=1+\frac{x^2+y^2+z^2}{2(xy+xz+yz)}\geq 1+\frac{xy+xz+yz}{2(xy+xz+yz)}=\frac{3}{2}.$$

P.1.5.5. Se consideră un tetraedru MNPQ, cu MN=3cm., PQ=5cm., NP=4cm,. și $m(\sphericalangle MN,PQ)=30^\circ$. Demonstrați că volumul tetraedrului nu depășește $5\,cm^3$.

Soluție: Fie $NS \parallel PQ, NS = PQ$ și $MN \parallel PR, MN = PR.$ Rezultă că MNSRPQ este prismă cu înălțimea $h \le NP = 4cm.$ și bazele MNS, RPQ. Atunci $\mathscr{V}_{MNPQ} = \frac{1}{3}.$

$$\mathscr{V}_{MNSRPQ} = \frac{1}{3}\cdot\mathscr{A}_{MNS}\cdot h \le \frac{4}{3}\cdot\mathscr{A}_{MNS} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot NM\cdot NS\cdot\sin 30^\circ = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 5cm^3.$$

P.1.5.6. Fie a, b, c dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic și d_1, d_2, d_3 lungimile diagonalelor fețelor sale. Demonstrați că $d_1 + d_2 + d_3 \ge (a+b+c)\sqrt{2}.$

Soluție: Se știe că $x + y = \sqrt{2(x^2 + y^2)}, \forall x, y \in \mathbb{R},$ de unde rezultă $a + b \le d_1\sqrt{2}, b + c \le d_2\sqrt{2}, c + a \le d_3\sqrt{2}.$ Prin însumare, rezultă inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru a=b=c, adică atunci când paralelipipedul este cub.

P.1.5.7. Fie ABCD un tetraedru regulat de muchie 1 și P un punct în interior. Arătați că suma distanțelor de la P la muchiile tetraedrului este mai mare decât $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Soluție: Construim un cub în care A, B, C, D sunt vârfuri ale cubului, iar muchiile tetraedrului ABCD sunt diagonalele fețelor cubului, câte o muchie pentru fiecare dintre cele 6 fețe. Distanța de la P la o muchie a tetraedrului este cel puțin egală cu distanța de la P la față ce conține muchia respectivă. Muchia tetraedrului fiind egală cu 1, rezultă că muchia cubului este $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Însumând cele 6 distanțe de la P la fețe, obținem triplul muchiei cubului, adică $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

P.1.5.8. Într-un tetraedru oarecare notăm cu S suma lungimilor celor patru mediane ale tetraedrului și cu s suma lungimilor celor douăsprezece mediane ale fețelor tetraedrului. Demonstrați că $9S < 4s.$

Soluție: Fie G_D centrul de greutate al feței ABC, iar A_1, B_1, C_1 mijloacele muchiilor $[BC], [AC]$ și respectiv $[AB].$ Atunci

$$DG_D < DA_1 + A_1G_D = DA_1 + \frac{1}{3}AA_1;$$

$$DG_D < DB_1 + B_1G_D = DB_1 + \frac{1}{3}BB_1;$$

$$DG_D < DC_1 + C_1G_D = DC_1 + \frac{1}{3}CC_1,$$

De unde, prin însumarea acestor inegalități, obținem:

$DG_D < \frac{1}{3}(DA_1 + DB_1 + DC_1) + \frac{1}{9}(AA_1 + BB_1 + CC_1).$

Prin însumarea inegalității de mai sus cu celelalte trei inegalități analoage corespunzătoare vârfurilor A, B și C, vom avea $S < \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)s$, adică $S < \frac{4}{9}s$, de unde $9S < 4s$.

P.1.5.9. Fie ABCD un tetraedru regulat și punctele P, N, M, respectiv, pe muchiile [AB], [BC], [CD], astfel încât $\frac{PB}{PA} = \frac{NB}{NC} = \frac{MD}{MD}$. Arătați că aria secțiuni făcute în tetraedru pe planul (PNM) este maximă dacă și numai dacă punctele P, N, M sunt mijloacele muchiilor [AB], [BC], [CD].

Soluție: Egalitatea rapoartelor din enunțul problemei implică $PN \parallel AC$ și $MN \parallel BD$. Fie Q intersecția planului PNM cu AD. Atunci PNMQ este paralelogram $(PN \parallel AC \parallel QM \text{ si } NM \parallel BD \parallel PQ)$. Deoarece BA=BC și DA=DC, deducem că B și D aparțin planului mediator al segmentului [AC], deci $AC \perp BD$. Drept urmare, PNMQ este dreptunghi.

Fie $BC = a$ și $\frac{BN}{NC} = k \in \mathbb{R}_+^\bullet$. Avem $\frac{PN}{a} = \frac{BN}{NC} = \frac{k}{k+1}$ și $\frac{MN}{a} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{k+1}$, de unde $PN + NM = a$.

Pe de altă parte, $\mathcal{A}_{PNMQ} = PN \cdot NM$, deci $\mathcal{A}_{PNMQ}$ este maximă dacă și numai dacă $\frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$, adică pentru $k = 1$, deci N este mijlocul lui [BC], P este mijlocul lui [AB], iar M este mijlocul lui [CD].

P.1.5.10. Demonstrați că dacă în paralelipipedul dreptunghic ALGEBRIC există inegalitatea

$$\frac{AG^2}{\mathcal{A}_{ALEG}} + \frac{LI^2}{\mathcal{A}_{LGIR}} + \frac{CG^2}{\mathcal{A}_{EGIC}} \le 6,$$

atunci paralelipipedul este cub. (Prin s-a notat aria feței ALGE și analoagele.)

Soluție: Fie BR=a, Rl=b, Lg=c. Inegalitatea din enunțul problemei se scrie astfel:

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{a^2+c^2}{ca} \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2}{2ca} \le 3 \ (1)$$

Pe de altă parte, deoarece $\frac{x^2+y^2}{2xy} \ge 1, \forall x, y > 0$ avem:

$$3 \le \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2}{2ca} \ (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $\frac{a^2+b^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2}{2ca}=3$, ceea ce implică:

$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{a^2+c^2}{2ca}=1$, de unde a=b=c și paralelipipedul considerat este cub.

Bibliografie:

1. Colecţia de culegeri "Matematica pentru excelenă" cls. a VII a şi a VIII a, Editura Paralela 45, 2014

2. Geometrie plană pentru gimnaziu şi liceu, TIPURI DE PROBLEME, METODE ŞI TEHNICI DE REZOLVARE, Editura Sibial, Craiova, 1994, Ion Vîrtopeanu, Olimpia Vârtopeanu

2. Other solutions to problems from Octogon Mathematical Magazine

by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu and Titu Zvonaru, Romania

PP.21446. If $x, y \in C$, then:

$$25\left((x+y)^3 - x^3 - y^3\right)\left((x+y)^7 - x^7 - y^7\right) = 21\left(\left((x+y)^5 - x^5 - y^5\right)\right).$$

Solution. The identity from the statement is equivalent with the fact that

$$5\left((x+y)^3 - x^3 - y^3\right); \left((x+y)^5 - x^5 - y^5\right)\sqrt{21}; 5\left((x+y)^7 - x^7 - y^7\right),$$

are in geometrical progression, i.e. PP.21443. We are done.

PP.21447. Prove that $n^4 - 20n^2 + 4$ can be prime number for all $n \in N$.

Solution. We think that the statement has a misprint, i.e. instead of 'can be' must 'can not be'. Indeed, for $n \le 4$, the number $n^4 - 20n^2 + 4$ is negative, and for $n \ge 5$ we have $n^4 - 20n^2 + 4 = (n^2 - 4n - 2)(n^2 + 4n - 2)$, so the given number can not be prime number for all $n \in N$, and the proof is complete.

PP.21460. If $x, y, z > 0$, then:

$5\left((x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3\right); \left((x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5\right)\sqrt{21};$

$5\left((x+y+z)^7 - x^7 - y^7 - z^7\right)$ are in geometrical progression if and only if $xyz(x+y+z) = 0$.

Solution. The conclusion from the statement yields by PP.21441.

PP.21488. If $x, y, z \in R$, then $8(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x+y+z) + 3 \ge 4(xy + yz + zx)$.

Solution. The inequality from the statement is equivalent with:

$$2(x-y)^2 + 2(y-z)^2 + 2(z-x)^2 + (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 \ge 0,$$

which is evidently true, and we are done.

PP.21489. If $x, y, z \in R$, then:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 6 \ge 2(xy + yz + zx).$$

Solution. The inequality from the statement is written as follows:

$(xy-1)^2 + (yz-1)^2 + (zx-1)^2 + x^2 + x + 1 + y^2 + y + 1 + z^2 + z + 1 \ge 0$, and since

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, yields that is true.

PP.21490. If $x \in R$, then $\frac{x^2}{x^2 - x + 1} + \frac{x^2(x^2+1)}{x^4 + x^2 + 1} \le \frac{8}{3}$.

Solution. Since $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$, the inequality from the statement is written as follows:

$3(x^4+x^3+x^2)+3x^4+3x^2\le 8(x^4+x^2+1)$

$\Leftrightarrow 2x^4-3x^3+2x^2+8\ge 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2-3x+2)+8\ge 0$, true because $2x^2-3x+2>0$, and the proof is complete.

PP.21491. If $x_k\in R$ $(k=1,2,...,n)$ and $\sum_{k=1}^{n}x_k^2=1$, then $\sum_{k=1}^{n}x_k\le\frac{2(n+1)}{3}$.

Solution. By Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality we obtain

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2,\text{ so }\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\le n\quad(1).$$

If $\sum_{k=1}^{n}x_k\le 0$, the inequality from the statement is evidently true.

If $\sum_{k=1}^{n}x_k>0$, then by (1) yields that $\sum_{k=1}^{n}x_k\le\sqrt{n}$, so it suffices to show that

$\sqrt{n}\le\frac{2(n+1)}{3}\Leftrightarrow 4n^2+8n+4\ge 9n\Leftrightarrow 4n^2-n+4\ge 0$, true. The proof is complete.

PP.21494. If $x,y,z\in R$, then:

$$2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3>3(xy+yz+zx).$$

Solution. The given inequality becomes:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+x^2y^2-xy+1+y^2z^2-yz+1+z^2x^2-zx+1>0$, which is true because $x^2y^2-xy+1=\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

PP.21508. If p and $p+2$ are twin primes, then $p^3>(p+2)^2$.

Solution. If $p=3$ then the inequality from the statement is true. We will prove that the given inequality is true for any natural number $p\ge 4$. Indeed, we have:

$p^3=p\cdot p^2\ge 4p^2=p^2+p\cdot 3p\ge p^2+12p>p^2+4p+4=(p+2)^2$, and we are done.

PP.21543. Determine all matrices $A\in M_2(R)$ such that $A^3=\begin{pmatrix}19 & 30\\ -45 & -71\end{pmatrix}$.

Solution. Let $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}19 & 30\\ -45 & -71\end{pmatrix}$.

Because $A^4=A\cdot A^3=AB$ and $A^4=A^3\cdot A=BA$, we obtain that:

$\begin{cases} 19x-45y=19x+30z \\ 30x-71y=19y+30t \\ 19z-45t=-45x-71z \\ 30z-71t=-45y-71t \end{cases}$, which is not all independently. By the first and the second equation of the system yields $y=-\frac{2}{3}z$ and $30x-30t=90y \Leftrightarrow y=\frac{x-t}{3}$.

So, $A=\begin{pmatrix} x & \frac{x-t}{3} \\ \frac{t-x}{2} & t \end{pmatrix}$, and we must to solve the system

$$\begin{cases} \frac{4x^3+3x^2t-t^3}{6}=19 \\ \frac{5x^3+3x^2t-3xt^2-5t^3}{18}=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+3x^2t-t^3=6\cdot 19 \\ 5x^3+3x^2t-3xt^2-5t^3=6\cdot 90 \end{cases}.$$

Subtracting the second equation multiplying with 19 from the first equation multiplying with 90 we obtain:

$$265x^3+213x^2t+57xt^2+5t^3=0.$$

For $t=0$, then $x=0$, which not verify the system. Dividing by t^3 and denote $\frac{x}{t}=p$ yields the equation

$265p^3+213p^2+57p+5=0 \Leftrightarrow (5p+1)(53p^2+32p+5)=0$, with only one real solution, $p=-\frac{1}{5}$, i.e. $t=-5x$. Returning to system we obtain $x=1, t=-5$ and

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, and we are done.

PP.21547. Let ABC be a triangle, and J denote the midpoint of GH. Prove that the center of Euler circle lies on the incircle if and only if $IJ=\frac{\sqrt{2}}{3}IH$.

Solution. Denoting with ω the center of Euler circle, we can calculate IJ and $I\omega$ because ω is midpoint of OH, $OG=\frac{OH}{3}$, and $JH=\frac{1}{3}OH$. But the problem is not true, for e.g. if triangle ABC is equilateral we have $O=I=H=G=J$, so $IJ=IH=0$, but I (ω) is not on incircle.
However, with median theorem and Stewart's theorem we obtain:
$4\cdot\omega I^2=2\cdot IO^2+2\cdot IH^2-OH^2; 9\cdot IJ^2=3\cdot IO^2+6\cdot IH^2-2\cdot OH^2$, and we deduce easily that $IJ=\frac{\sqrt{2}}{3}IH$, imply $I\omega^2=r^2$ only if $IO^2=8r^2$, and we are done.

PP.21567. Let ABC be atriangle. If $\sum tg^2\frac{A}{2}\geq 1$, then $\sum tg\frac{A}{2}\geq\sqrt{3}$.

Solution. Since $\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=1$, we have:

$$\sum tg^2\frac{A}{2}\geq 1\Rightarrow \sum tg^2\frac{A}{2}+2\sum tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\geq 3\Rightarrow\left(\sum tg\frac{A}{2}\right)^2\geq 3\Rightarrow \sum tg\frac{A}{2}\geq\sqrt{3},$$

and the proof is complete.

PP.21574. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $\sum_{cyclic}\frac{(5a_1+a_2)(5a_1+4a_2)}{8a_1+a_2}\geq 6\sum_{k=1}^{n}a_k$.

Solution. For $x,y>0$, we have:

$$\frac{(5x+y)(5x+4y)}{8x+y}\geq 3x+3y\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0\text{, true.}$$

Therefore, $\sum_{cyclic}\frac{(5a_1+a_2)(5a_1+4a_2)}{8a_1+a_2}\geq\sum_{cyclic}(3a_1+3a_2)=6\sum_{k=1}^{n}a_k$, and we are done.

PP.21575. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then:

$$16\sum\frac{a_1a_2(a_1+a_2)}{(3a_1+a_2)(a_1+3a_2)}+\sum\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\leq 3\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Solution. We use the following inequality:

$$\frac{16xy(x+y)}{(3x+y)(x+3y)}+\frac{x^2+y^2}{x+y}\leq\frac{3(x+y)}{2}\qquad(1)$$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2(3x+y)(x+3y)\geq 32xy(x+y)^2+2(x^2+y^2)(3x+y)(x+3y)$

$\Leftrightarrow (3x^2+3y^2+6xy)(3x^2+3y^2+10xy)\geq 32xy(x^2+y^2+2xy)+(2x^2+2y^2)(3x^2+$

$+3y^2+10xy)\Leftrightarrow 3x^4-4x^3y+2x^2y^2-4xy^3+3y^4\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2)\geq 0$, true.

Writing the inequality (1) for the pairs $a_1,a_2;a_2,a_3;...;a_{n-1},a_n;a_n,a_1$ and adding yields that:

$$16\sum\frac{a_1a_2(a_1+a_2)}{(3a_1+a_2)(a_1+3a_2)}+\sum\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\leq\frac{3}{2}\sum_{cyclic}(a_1+a_2)=3\sum_{k=1}^{n}a_k\text{, and we are done.}$$

PP.21609. Let ABC be a triangle. Prove that:

1) $\sum a\left(\sum a^2+\sum ab\right)\geq 3\sum a^2(b+c)$, and

2) $3s^2\leq 5(r^2+4Rr)$ are equivalent.

Solution. The inequality $\sum a\left(\sum a^2+\sum ab\right)\geq 3\sum a^2(b+c)$ is equivalent with $\sum a^3+3abc\geq\sum a^2(b+c)$, i.e. Schur's inequality, so (1) is true.

The inequality $3s^2\leq 5(r^2+4Rr)$ is not true; for e.g. if ΔABC is equilateral with the length of side equal with 1, then $s=\frac{3}{2}$, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$ and (2) is not true.

PP.21618. If $0 < a_k \le \frac{1}{2}$ $(k = 1,2,...,n)$ and $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, then:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-a_k} \le \frac{2(5n+16)}{9}.$$

Solution. We prove that: if $0 < x \le \frac{1}{2}$, then:

$$\frac{1}{1-x} \le \frac{n\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)^2}x^2 + \frac{\sqrt{n}(2\sqrt{n}-3)}{2(\sqrt{n}-1)^2} \qquad (1)$$

The inequality (1) becomes successively:

$$2(\sqrt{n}-1)^2 \le n\sqrt{n}x^2 - n\sqrt{n}x^3 + (2n-3\sqrt{n}) - (2n-3\sqrt{n})x$$

$$\Leftrightarrow n\sqrt{n}x^3 - n\sqrt{n}x^2 + (2n-3\sqrt{n})x - \sqrt{n} + 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 (x\sqrt{n} - \sqrt{n} + 2) \le 0 \qquad (2)$$

Since $x \le \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 4 \le \sqrt{n}$, true for $x \ge 16$, yields that (2) is true, so (1) is also true.

Writing (1) for $a_1, a_2, ..., a_n$ and summing we get:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-a_k} \le \frac{n\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)^2} + \frac{n\sqrt{n}(2\sqrt{n}-3)}{2(\sqrt{n}-1)^2}.$$

Therefore, it suffices to prove that:

$$\frac{n\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)^2} + \frac{n\sqrt{n}(2\sqrt{n}-3)}{2(\sqrt{n}-1)^2} \le \frac{2(5n+16)}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9n\sqrt{n} + 18n^2 - 27n\sqrt{n} \le 20n^2 + 64n - 40n\sqrt{n} - 128\sqrt{n} + 20n + 64$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 22n\sqrt{n} + 84n - 128\sqrt{n} + 64 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}-4)^2 \ge 0$, which is true, and we are done.

PP.21625. If $a,b,c > 0$, then: $\sum \frac{a^3c^2}{a+b} \ge \frac{1}{2}\sum a^2b^2$.

Solution. By Harald Bergström's inequality we obtain:

$\sum \frac{a^3c^2}{a+b} = \sum \frac{a^4c^4}{a^2c^2 + abc^2} \ge \frac{\left(\sum a^2b^2\right)^2}{\sum a^2b^2 + abc\sum a}$, so it suffices to prove that

$$\frac{\left(\sum a^2b^2\right)^2}{\sum a^2b^2 + abc\sum a} \ge \frac{1}{2}\sum a^2b^2 \Leftrightarrow 2\sum a^2b^2 \ge \sum a^2b^2 + abc\sum a$$

$\Leftrightarrow \sum a^2b^2 \ge abc\sum a$, which is well-known $\sum x^2 \ge \sum xy$ for the numbers ab, bc, ca.

The proof is complete.

PP.21626. If $a,b,c>0$, then $\sum\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{c}\geq 4\sum a^2$.

Solution 1. The inequality from the statement is written as follows:

$$\sum ab(a+b)(a^2+b^2)\geq 4abc\sum a^2$$

$$\Leftrightarrow \sum a^4b+\sum ab^4+\sum a^3b^2+\sum a^2b^3\geq 4abc\sum a^2 \qquad (1)$$

By AM-GM inequality we have that:

$a^4b+a^4c+a^2b^3+a^2c^3\geq 4a^3bc$;

$b^4c+b^4a+b^2c^3+b^2a^3\geq 4ab^3c$;

$c^4a+c^4b+c^2a^3+c^2b^3\geq 4abc^3$, and by adding up we obtain (1), and we are done.

Solution 2. The inequality (1) follows by Muirhead's inequality.

Indeed, because $(4,1,0)\succ(3,1,1)$ yields that: $\sum_{sym}a^4b\geq\sum_{sym}a^3bc$ and because $(3,2,0)\succ(3,1,1)$ we deduce $\sum_{sym}a^3b^2\geq\sum_{sym}a^3bc$. But $\sum_{sym}a^4b\geq\sum_{sym}a^3bc\Leftrightarrow\sum a^4b+\sum ab^4\geq 2\sum a^3bc$ and $\sum_{sym}a^3b^2\geq\sum_{sym}a^3bc\Leftrightarrow\sum a^3b^2+\sum a^2b^3\geq 2\sum a^3bc$, which by adding yields (1).

The proof is complete.

PP.21627. If $a,b,c>0$, then $\sum\frac{a^2+b^2}{c}\leq\frac{2\sum a^4}{abc}$.

Solution. The inequality from the statement can be written as:

(*) $2\sum a^4\geq\sum a^3b+\sum ab^3$, which follows by Muirhead's inequality (because $(4,0,0)\succ(3,1,0)$).

Other solution yields by AM-GM inequality. Indeed, we have the following inequalities:

$$\frac{a^4+a^4+a^4+b^4}{4}+\frac{a^4+b^4+b^4+b^4}{4}\geq a^3b+ab^3;$$

$$\frac{b^4+b^4+b^4+c^4}{4}+\frac{b^4+c^4+c^4+c^4}{4}\geq b^3c+bc^3;$$

$\frac{c^4+c^4+c^4+a^4}{4}+\frac{c^4+a^4+a^4+a^4}{4}\geq c^3a+ca^3$, which by adding up yields to (*) and we are done.

PP.21641. If $a,b,c>0$, then $\sum\frac{2a^2+c(b-c)}{b+c}\geq a+b+c$.

Solution. We have $\sum\frac{2a^2+c(b-c)}{b+c}=\sum\frac{c(b+c)}{b+c}+\sum\frac{2a^2-2c^2}{b+c}=$

$=a+b+c+2\sum\frac{a^2-c^2}{b+c}$, so it is sufficient to prove that:

$$\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}\geq 0 \qquad (1)$$

Indeed, denoting $t = ab + bc + ca$, the inequality (1) becomes

$$(a^2 - c^2)(a^2 + t) + (b^2 - a^2)(b^2 + t) + (c^2 - b^2)(c^2 + t) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 + t(a^2 - c^2 + b^2 - a^2 + c^2 - b^2) \ge 0$$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$, which is true, and the proof is complete.

PP.21652. If $a_k > 0 \ (k = 1,2,...,n)$, then $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \ge \sum a_1^2(2a_n - a_2)$.

Solution. We have:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 - \sum a_1^2(2a_n - a_2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + \sum a_1^2 a_2 - 2\sum a_1^2 a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + \sum a_n^2 a_1 - 2\sum a_1^2 a_n = \sum (a_1^3 + a_1 a_n^2 - 2a_1^2 a_n) = \sum a_1 (a_1 - a_n)^2 \ge 0,$$

and the proof is complete.

PP.21659. If $x_k > 0 \ (k = 1,2,...,n)$, then $\prod_{cyclic} (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \ge \prod_{k=1}^{n} x_k^2$.

Solution. Using $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \ge x_1 x_2$ and $\prod_{cyclic} x_1 x_2 = \prod_{k=1}^{n} x_k^2$ follows the conclusion.

PP.21660. If $x_k > 0 \ (k = 1,2,...,n)$, then $\sum \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)} \le \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.

Solution. For $a, b > 0$, we have:

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)(a^2 + b^2)} \le \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow 8a^3 b + 8a^2 b^2 + 8ab^3 \le 3a^4 + 3a^2 b^2 + 6a^3 b +$$

$+ 3a^2 b^2 + 3b^4 + 6ab^3 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(a - b)(a^3 - b^3) \ge 0$, true.

Therefore, $\sum \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)} \le \frac{3}{8} \sum \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$, and the proof is complete.

PP.21662. Solve on $[0, \infty)$ the following system:

$$\begin{cases} (x + y + z)^3 = y^3 + z^3 + t^3 + 24yzt \\ (y + z + t)^3 = z^3 + t^3 + x^3 + 24ztx \\ (z + t + x)^3 = t^3 + x^3 + y^3 + 24txy \\ (t + x + y)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz \end{cases}.$$

Solution. We have

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 3x^2 z + 3xz^2 + 3y^2 z + 3yz^2 + 6xyz \overset{AM-GM}{\ge}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} x^3+y^3+z^3+24\cdot\sqrt[24]{(xyz)^{24}}=x^3+y^3+z^3+24xyz\,.$$

Taking account by the above inequality and adding the equations of the system yields that it must to have $x=y=z=t$. Therefore, the solutions of the system are (a,a,a,a) where $a\in[0,\infty)$.

PP.21696. Solve on $(0,\infty)$ the following system:

$$\begin{cases} 2+\dfrac{8x^3}{(1+y)(1+z)}=6y-x-z \\ 2+\dfrac{8y^3}{(1+z)(1+x)}=6z-y-x \\ 2+\dfrac{8z^3}{(1+x)(1+y)}=6x-z-y \end{cases}.$$

Solution. Addind up the equation of the system we obtain:

$$\left(2+y+z+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}-6x\right)+\left(2+z+x+\frac{8y^3}{(1+z)(1+x)}-6x\right)+$$
$$+\left(2+x+y+\frac{8z^3}{(1+x)(1+y)}-6z\right)=0\,.$$

Using AM-GM inequality we have:

$$2+y+z+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}=(1+y)+(1+z)+\frac{8x^3}{(1+y)(1+z)}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{(1+y)(1+z)\cdot 8x^3}{(1+y)(1+z)}}=6x\,.$$

Therefore, we have equality, i.e. $1+y=1+z=\dfrac{8x^3}{(1+y)(1+z)}$.

We must to solve the equation $2+\dfrac{8x^3}{(1+x)^2}=4x\Leftrightarrow(x-1)^2(2x+1)=0$.

So we obtain the solution $(1,1,1)$, and we are done.

PP.21701. If $a_i>0\ \ (i=1,2,...,n)$, then

$$\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\right)\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}\right)...\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\right)\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{k-1},$$

when $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Solution. For $n=3,\ k=2,\ a_1=a_2=a_3=1$, the inequality from the statement becomes

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1+1+1}{3}$, which is not true. We will prove that:

$$\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\right)\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}\right)\cdots\left(\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\right)<\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{k-1},$$

when $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

Applying HM-AM inequality we have

$$\sum\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k^2}<\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}a_i\ .$$

Yields $LHS\le\frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{k-1}<\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{k-1}$, and we are done.

PP.21702. If $a_k>0\ (k=1,2,\ldots,n)$, then

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{n-1}\right)\ge\sum_{k=1}^{n}a_k^n+n(n-1)\prod_{k=1}^{n}a_k\ .$$

Solution. By Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality we obtain:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{n-1}\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^n+2\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a_i^na_j^n}$$

The sum $\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a_i^na_j^n}$ has $\frac{n(n-1)}{2}$ terms; and in product of this terms the exponent of a_i is also $\frac{n(n-1)}{2}$ and then by AM-GM inequality yields that

$$2\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a_i^na_j^n}\ge2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}=n(n-1)\prod_{k=1}^{n}a_k\ .$$

By above yields the desired result, and the proof is complete.

PP.21704. If $a_k>0\ (k=1,2,\ldots,n)$ and $p\in N$, then $\sum_{cyclic}\frac{a_1^{2p+2}}{a_2}\ge\sum_{cyclic}a_1a_2^{2p}$.

Solution. We prove the following inequality:

$\sum_{cyclic}\left(\frac{a_1^{2p+2}}{a_2}+\frac{a_2^{2p+2}}{a_1}\right)\ge\sum_{cyclic}\left(a_1a_2^{2p}+a_1^{2p}a_2\right)$, which follows by summing the inequalities of type $\frac{a_1^{2p+2}}{a_2}+\frac{a_2^{2p+2}}{a_1}\ge a_1a_2^{2p}+a_1^{2p}a_2\Leftrightarrow(a_1^2-a_2^2)(a_1^{2p+1}-a_2^{2p+1})\ge0$, true because $a_1^2-a_2^2$ and $a_1^{2p+1}-a_2^{2p+1}$ has the same sign. The proof is complete.

PP.21719. Let ABC be a triangle, the altitude h_a intersects the circumcircle in point E, the bisector of angle $\angle EAC$ intersects the circumcircle in point D. The tangent line to circle in point D intersects the lines AE and BC in points M and N

1)Determine all triangles ABC for which $BHCE$ is rhombus.

2)Determine all triangle ABC for which $ABMN$ is cyclic.

Solution.

1) $BHCE$ has the diagonals perpendicular. If $AH \cap BC = \{A'\}$ it is well-known that $HA' = A'E$, so $BA' = A'C$, Therefore, $BHCE$ is rhombus if the triangle ABC is isosceles, with $AB = AC$.

2)We have

$$\angle BNM = \angle BND = \frac{arc(BD) - arc(DC)}{2} = \frac{arc(BD) - arc(DE)}{2} = \frac{arc(BE}{2} = \angle BAM .$$

So $ABMN$ is cyclic for any triangle ABC. The proof is complete.

PP.21729. . If $a,b,c > 0$, then $\sum a^2 \geq \sum ab + \frac{1}{9}\left(\sum |a-b|\right)^2$.

Solution. The inequality $\sum a^2 \geq \sum ab + \frac{3}{16}\left(\sum |a-b|\right)^2$ is stronger than the inequality from the statement; a proof was given on the solution of PP.20892.

PP.21730. If $a,b,c > 0$, then $\sum a^2 \geq \sum ab + \frac{1}{2}\sum\left(|a-c| + |b-c|\right)^2$.

Solution. The given inequality is not true (for e.g. taking $a = 1, b = 2, c = 3$).

We will prove the following inequality

(*) $\sum a^2 \geq \sum ab + \frac{1}{8}\sum\left(|a-c| + |b-c|\right)^2$.

We proceed like in PP.20892, let $a \leq b \leq c$ and $b = a + x$, $c = a + x + y$ with $x, y \geq 0$.

Then (*) becomes

$$x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{8}\left((x+2y)^2 + (2x+y)^2 + (x+y)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8xy + 8y^2 \geq 6x^2 + 10xy + 6y^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$, true, and we are done.

PP.21760. Prove that for all $n \in N$ the number $n(n+1)(2n^4 + 4n^3 + n^2 - n - 1)$ is divisible by 360.

Solution. Something is wrong because for $n = 3$ the expression from enunciation is $3 \cdot 4 \cdot 275$ which is not divisible by 9 (in fact the expression from the statement is not divisible by 9 for all n a multiple of 3, but not a multiple of 9).

3. Exemple de relații

Prof. Alexandru Elena-Marcela, gr. I
Școala Gimnazială Nr.3 Baia, structura Bogata

Exemplul 1:

Fie $X=\{a,b,c,d\}$, $Y=\{b,c\}$, $Z=\{a,b,c\}$

$R\subseteq X\times Y$, $R=\{(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$

$S\subseteq Y\times Z$, $S=\{(b,a),(b,b),(c,c)\}$.

Astfel avem:

$R^{-1}=\{(b,a),(c,a),(b,c),(c,c)\}$; $S^{-1}=\{(a,b),(b,b),(c,c)\}$;

$\Delta(X)=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$;

$\Delta(Y)=\{(b,b),(c,c)\}$;

$\Delta(Z)=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$;

$dom\ R=\{a,c\}$;

$codom\ R^{-1}=\{a,c\}$;

$R(\{a,b\})=\{b,c\}$;

$R(\{d\})=\phi$;

$S^{-1}(\{b\})=\{b\}$;

$S\circ R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

Exemplul 2:

Fie A mulțimea tuturor oamenilor de pe glob și $R\subseteq A\times A$ definită prin xRy dacă x este copilul lui y. Astfel relația R nu este reflexivă deoarece niciun om nu este propriul său copil, este asimetrică și antisimetrică. De asemenea R nu este tranzitivă deoarece dacă x este copilul lui y și y este copilul lui z atunci x nu este copilul lui z.

Exemplul 3:

Fie P mulțimea tuturor punctelor din plan și un punct fix $Q\in P$ și $R\subseteq P\times P$ definită MRN dacă și numai dacă există o dreaptă d care conține punctele M, N și Q.

Astfel relația R este reflexivă, simetrică, dar nu este tranzitivă deoarece se pot alege punctele M, N, N' astfel încât să nu fie coliniare.

Dacă definim relația $S\subseteq P^{*}\times P^{*}$, unde $P^{*}=P-\{0\}$, MSN dacă și numai dacă M, N, N' sunt coliniare, atunci S este reflexivă, simetrică dar și tranzitivă deoarece dacă MSN și NST există o dreaptă a care conține punctele M, N, N' și o dreaptă b care conține punctele N, T și N', dar $N\in P^{*}$, deci $N\neq N'$ astfel dreptele a și b au două puncte comune N și N'. Rezultă $a=b=d$. Dreapta d conține punctele M, N, T și N', deci MST.

Exemplul 4:

Relațiile „a avea aceeași direcție”, „a avea același sens”, „a avea aceeași lungime” sunt relații de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate din spațiu (unde prin segment orientat înțelegem o pereche ordonată (A,B) de puncte din spațiu).

Exemplul 5:

Relația de „divizibilitate” pe mulțimea numerelor naturale sau pe orice mulțime A de numere naturale este o relație de ordine.

Spunem că $a \vdots b$ dacă există c astfel încât $a = b \cdot c$.

Astfel dacă $A = \{2,3,4,5,6\}$ atunci:

„$\vdots$” $= \{(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \subseteq A \times A$.

Exemplul 6:

Fie $A = \{1,2,3,4\}$ și aplicația $\sigma : A \to A$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau : A \to A$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $\tau \circ \sigma : A \to A$, $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma \circ \tau : A \to A$, $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemplul 7:

Construcția mulțimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$

Fie pe mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ următoarea relație:

Pentru $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim $(a,b)R(c,d)$ dacă $a + d = b + c$.

Aceasta este o relație de echivalență fiind:

1) reflexivă deoarece dacă $a + b = b + a$ implică $(a,b)R(a,b)$;

2) simetrică deoarece dacă $(a,b)R(c,d)$ rezultă $a + d = b + c$, de unde $c + b = d + a$, deci $(c,d)R(a,b)$;

3) tranzitivă deoarece dacă $(a,b)R(c,d)$ și $(c,d)R(e,f)$ rezultă $a + d = b + c$ și $c + f = d + e$, de unde $(a + f) + (c + d) = (a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e) =$ $= (b + e) + (c + d)$, deci $a + f = b + e$, adică $(a,b)R(e,f)$.

Clasa de echivalență a lui $(a,b) \overset{not.}{=} \overline{(a,b)} = \{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (a,b)R(c,d)\}$.

Mulțimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{/R} = \{\overline{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ se numește **mulțimea numerelor întregi** și se notează cu $\mathbb{Z}$.