REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

OCTOMBRIE 2015

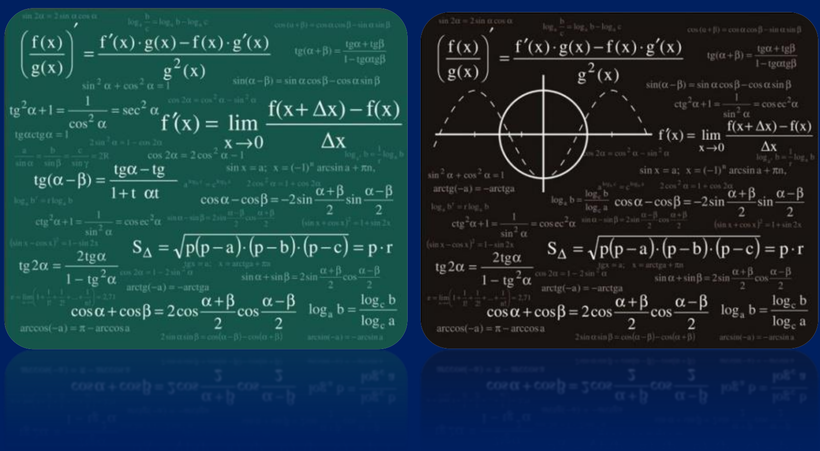
PESTE 5 ANI DE APARIŢII LUNARE!

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

WWW.MATEINFO.RO



COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

Articole:

1. Solutions for some problems from Octogon Mathematical Magazine

By D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu and Titu Zvonaru

PP.21776. Let x, y, z be positive real numbers, Show that

$$\frac{1}{6}\left(\sum \frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}\right) \geq \prod\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ holds for any positive integer.

Solution. We have:

$\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n} \geq \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow (x^{n+2}-y^{n+2})(x^2-y^2) \geq 0$, true because $x^{n+2}-y^{n+2}$ and x^2-y^2 has the same sign. By AM-GM inequality we obtain:

$$\frac{1}{6}\left(\sum \frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}\right) \geq \frac{1}{6}\left(\sum \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right) \geq \prod\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$ and we are done.

PP.21777. Let a, b, c be three positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{2b+7\cdot\sqrt[4]{ab^3}}+\frac{b}{2c+7\cdot\sqrt[4]{bc^3}}+\frac{c}{2a+7\cdot\sqrt[4]{ca^3}} \geq \frac{1}{3}.$$

Solution. Applying first AM-GM inequality and than the inequality of Harald Bergström we obtain:

$$\frac{a}{2b+7\cdot\sqrt[4]{ab^3}}+\frac{b}{2c+7\cdot\sqrt[4]{bc^3}}+\frac{c}{2a+7\cdot\sqrt[4]{ca^3}} \geq$$

$$\geq \frac{a}{2b+7\cdot\frac{a+3b}{4}}+\frac{b}{2c+7\cdot\frac{b+3c}{4}}+\frac{c}{2a+7\cdot\frac{c+3a}{4}} =$$

$$= 4\left(\frac{a}{7a+29b}+\frac{b}{7b+29c}+\frac{c}{7c+29a}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{7a^2+29ab}+\frac{b^2}{7b^2+29bc}+\frac{c^2}{7c^2+29ac}\right) \geq 4\cdot\frac{(\sum a)^2}{7\sum a^2+29\sum ab},$$

and it remains to show that

$12(\sum a)^2 \geq 7\sum a^2+29\sum ab \Leftrightarrow 5\sum a^2 \geq 5\sum ab$, which is true, and we are done.

PP.21780. Let a,b,c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a(b+c)^5}+\frac{1}{b(c+a)^5}+\frac{1}{c(a+b)^5}\right)\geq\frac{1}{32}.$$

PP. 21861. If $x,y,z>0$, then $\dfrac{\sum x^2-\sum xy}{2\left(\sum x\right)^2}+4\left(\sum x\right)\sum\dfrac{1}{2x+y+z}\leq\dfrac{3\left(\sum x\right)^2}{\sum xy}$.

Solution. We use the identities

$$2\sum a^2-2\sum ab=\sum(a-b)^2 \text{ and}$$

$$\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{1}{a}\right)-9=\sum\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Because $4\left(\sum x\right)=\sum(2x+y+z)$ the given inequality becomes successively

$$\frac{\sum x^2-\sum xy}{2\left(\sum x\right)^2}+\left((2x+y+z)\right)\left(\sum\frac{1}{2x+y+z}\right)-9\leq\frac{3\left(\sum x\right)^2}{\sum xy}-9$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum x^2-\sum xy}{2\left(\sum x\right)^2}+\sum\frac{(2x+y+z-x-2y+z)^2}{(2x+y+z)(x+2y+z)}\leq\frac{3\left(\sum x^2-\sum xy\right)}{\sum xy}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum(x-y)^2}{4\left(\sum x\right)^2}+\sum\frac{(x-y)^2}{(2x+y+z)(x+2y+z)}\leq\frac{3\sum(x-y)^2}{2\sum xy}.$$

It suffices to show that

$$\frac{(x-y)^2}{4\left(\sum x\right)^2}+\frac{(x-y)^2}{(2x+y+z)(x+2y+z)}\leq\frac{3(x-y)^2}{2\sum xy}.$$

If $x=y$, we have equality; if $x\neq y$ we must to show that

$$\frac{1}{(2x+y+z)(x+2y+z)}\leq\frac{3}{2\sum xy}-\frac{1}{4\left(\sum x\right)^2}\text{, and because}$$

$(2x+y+z)(x+2y+z)\geq(x+y+z)^2\geq3\sum xy$, it suffices to prove that

$$\frac{1}{3\sum xy}\leq\frac{3}{2\sum xy}-\frac{1}{4\left(\sum x\right)^2}\Leftrightarrow4\left(\sum x\right)^2\leq18\left(\sum x\right)^2-3\sum xy\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow14\left(\sum x\right)^2\geq3\sum xy$, true. The proof is complete.

PP. 21863. If $a,b>0$, then $\dfrac{(a-b)^2}{2(2a+b)^2}+\dfrac{2(2a+b)(7a+5b)}{(a+b)(3a+b)}\leq\dfrac{3(2a+b)^2}{a(a+2b)}$.

Solution. With AM-GM inequality we have

$$\sqrt{(2a+b)(a+2b)}\leq\frac{3(a+b)}{2}\Leftrightarrow(a+b)^2\geq\frac{4(2a+b)(a+2b)}{9}\text{, and then}$$

$$\frac{2(2a+b)(7a+5b)(a+b)}{(a+b)^2(3a+b)} \le \frac{9(2a+b)(7a+5b)(a+b)}{2(2a+b)(a+2b)(3a+b)} = \frac{9(a+b)(7a+5b)}{2(a+2b)(3a+b)}.$$

Because

$$\frac{3(2a+b)^2}{a(a+2b)} - \frac{9(a+b)(7a+5b)}{2(a+2b)(3a+b)} =$$

$$= \frac{6(2a+b)^2(3a+b) - 9a(a+b)(7a+5b)}{2a(a+2b)(3a+b)} =$$

$$= \frac{9a^3 - 12a^2b - 3ab^2 + 6b^3}{2a(a+2b)(3a+b)} =$$

$$= \frac{3(a+b)^2(3a+2b)}{2a(a+2b)(3a+b)},$$

the inequality from the statement becomes

$$\frac{(a-b)^2}{2(2a+b)^2} \le \frac{3(a-b)^2(3a+2b)}{2a(a+2b)(3a+b)}.$$

If $a=b$, we have equality; if $a \ne b$ it remains to show that

$$3(3a+2b)(2a+b)^2 \ge a(a+2b)(3a+b),$$

or using the fact that $3a+2b > 3a+b$ it suffices to prove that

$$3(2a+b)^2 \ge a(a+2b) \Leftrightarrow 11a^2 + 10ab + 3b^2 \ge 0, \text{ true.}$$

The proof is complete.

PP. 21874. If $a,b,c>0$, then $\sum \frac{a}{\sqrt{3(b^2+c^2)+\frac{7}{3}bc}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

Solution. By Hölder's inequality we obtain

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{3(b^2+c^2)+\frac{7}{3}bc}}\right)\left(\sum \frac{a}{\sqrt{3(b^2+c^2)+\frac{7}{3}bc}}\right)\left(\sum a[3(b^2+c^2)+\frac{7}{3}bc]\right) \ge$$

$\ge (a+b+c)^3$, and it suffices to show that

$$\frac{\left(\sum a\right)^3}{\sum a[3(b^2+c^2)+\frac{7}{3}bc]} \ge \frac{27}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25\sum a^3 + 75\sum a^2b + 75\sum ab^2 + 150abc \ge 81\sum a^2b + 81\sum ab^2 + 189abc$$

$$\Leftrightarrow 25\sum a^3 \ge 6\sum a^2b + 6\sum ab^2 + 39abc, \text{ (1).}$$

By Muirhead's inequality we have

$$2\sum a^3 \ge \sum a^2b + \sum ab^2, \text{ (2).}$$

By AM-GM inequality we have

$$\sum a^3 \geq 3abc, (3).$$

By adding 6 times (2) with 13 times (3) yields (1), and we are done.
Remark. Other proof for (2) is given in solution of PP. 22273.

PP. 21884. In all triangle ABC holds $3\sum a^4 + 64s^2Rr \geq 5(s^2 + r^2 + 4Rr)^2$.

Solution. We think there is a typo.
Because $64s^2Rr = 8abc\sum a$ and $s^2 + r^2 + 4Rr = \sum ab$ the inequality from the statement is written

$$3\sum a^4 + 8abc\sum a \geq 5\left(\sum ab\right)^2 \Leftrightarrow 3\sum a^4 \geq 5\sum a^2b^2 + 2abc\sum a.$$

If we take $a = b = c = 1$, we obtain $9 \geq 15 + 6$, false!
The inequality is true if instead of $3\sum a^4$ we consider $7\sum a^4$, because
$5\sum a^4 \geq 5\sum a^2b^2$ and $2\sum a^4 \geq 2abc\sum a$. We are done.

PP. 21886. In all triangle ABC holds $\sum a^2m_b^2m_c^2 \geq 27s^2R^2r^2$.

Solution. Because $a^2b^2c^2 = 16s^2R^2r^2$ and $16m_b^2m_c^2 = (2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)$
the inequality to prove is written successively

$$\sum a^2(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) \geq 27a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(4a^4 - 2b^4 - 2c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 5b^2c^2) \geq 27a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum a^6 - 2\sum a^2b^4 - 2\sum a^4b^2 + 2\sum a^4b^2 + 2\sum a^2b^4 + 15a^2b^2c^2 \geq 27a^2b^2c^2$$

$\Leftrightarrow \sum a^6 \geq \sum a^2b^2c^2$, which is true by AM-GM inequality.
We are done.

PP. 21896. If $a_k > 0$ ($k = 1,2,...,n$), then $\displaystyle\sum_{cyclic} \frac{a_1^3}{(a_1 + a_2)(\sqrt{5}a_1 + a_2)} \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{8}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution. The inequality from the statement yields by

$$\frac{x^3}{(x + y)(\sqrt{5}x + y)} \geq \frac{\sqrt{5}x - y}{8},$$

which is written successively

$$8x^3 \geq (x + y)(\sqrt{5}x + y)(\sqrt{5}x - y)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 \geq (x + y)(5x^2 - y^2)$$

$\Leftrightarrow 3x^3 + xy^2 - 5x^2y + y^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(3x + y) \geq 0$, which is true, and we are done.

Note. We make the correction of typo from the statement, i.e. $''\geq''$ instead of $''\leq''$.

PP. 21899. In all triangle ABC holds $\sum \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq 12$.

Solution. We shall use AM-GM inequality. We have
$s^3 = (s-a+s-b+s-c)^3 \geq 27(s-a)(s-b)(s-c)$ and then

$$\sum \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} = \sum \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} + \sum \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}} + 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}} =$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}} + 3 =$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}} + 3 \geq 3\sqrt[3]{27} + 3 = 12,$$ and we are done.

PP. 21913. If $a,b,c>0$, then $\left(\sum a^8\right)\left(\sum \frac{1}{a^8}\right) \geq \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right)$.

Solution. Using the inequality $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, we have

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \text{ and}$$

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \geq \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}.$$

Yields

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right) = 3+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \geq$$

$$\geq 3+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b} = \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right).$$

Then, we obtain

$$\left(\sum a^8\right)\left(\sum \frac{1}{a^8}\right) \geq \left(\sum a^4\right)\left(\sum \frac{1}{a^4}\right) \geq \left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right) \geq \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right),$$ Q.E.D.

Remark. By induction yields $\left(\sum a^{2^n}\right)\left(\sum \frac{1}{a^{2^n}}\right) \geq \left(\sum a\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right), n \in N$.

PP. 21937. If $a,b,c>0$, then $\sum \frac{a}{3b^2+2bc+3c^2} \geq \frac{9}{8(a+b+c)}$.

Solution. By H. Bergström' s inequality we obtain

$$\sum \frac{a}{3b^2+2bc+3c^2} = \sum \frac{a^2}{3ab^2+2abc+3ac^2} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{3\sum ab^2+6abc+3\sum ab^2}$$

and it suffices to prove that

$$\frac{\left(\sum a\right)^2}{3\sum ab^2+6abc+3\sum ab^2} \geq \frac{9}{8(a+b+c)}$$

$\Leftrightarrow 8\sum a^3+24\sum a^2b+24\sum ab^2+48abc \geq 27\sum a^2b+27\sum ab^2+54abc$

$\Leftrightarrow 8\sum a^3 \geq 3\sum a^2b+3\sum ab^2+6abc$, which yields by (2) and (3) from solution of PP. 21874. The proof is complete.

PP. 21942. Solve in Z the equation $2x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3=0$.

Solution. The equation is written as $(x-y)(2x^2+2y^2-xy)=0$; which the solution (k,k), with $k \in Z$.

It remains to solve the equation $2x^2+2y^2=xy$.

If x,y have different signs, then LHS is positive and RHS is negative;

If x,y have the same signs we can consider both positive (thus we take $x'=-x$, $y'=-y$ and we obtain the same equation).

In this case we have $2x^2+2y^2 \geq 4xy$ and we do not obtain solutions.

The proof is complete.

PP. 21949. If $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, then $\frac{8}{\sin^2 2x}+\frac{3}{\sin^4 x+\cos^4 x} \geq 14$.

Solution. We have $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

We denote $\sin^2 2x=t>0$, then the inequality to prove becomes

$\frac{8}{t}+\frac{6}{2-t} \geq 14 \Leftrightarrow 8-4t+3t \geq 14t-7t^2 \Leftrightarrow 7t^2-15t+8 \geq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(7t-8) \geq 0$, true for $t \in (0,1)$. The proof is complete.

PP. 21954. If $x,y,z>0$ and $x+y+z=1$, then $\sum\frac{az+by}{x+yz}\geq(a+b)\sum\frac{x}{x+yz}$, for all $a,b>0$.

Solution. Because $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z)$ the inequality to prove is written successively

$$\sum\frac{az+by}{(x+y)(x+z)}\geq\sum\frac{ax+bx}{(x+y)(x+z)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum(az+by)(y+z)\geq\sum(ax+bx)(y+z)$$

$$\Leftrightarrow a\sum yz+a\sum z^2+b\sum y^2+b\sum yz\geq a\sum xy+a\sum xz+b\sum xy+b\sum xz$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\sum x^2+(a+b)\sum xy\geq 2(a+b)\sum xy$$

$\Leftrightarrow(a+b)\sum x^2\geq(a+b)\sum xy\Leftrightarrow\sum x^2\geq\sum xy$, true and we are done.

Remark. We observe that the inequality is true in weaker condition $a+b\geq 0$.

PP. 21958. If $a,b,c>0$, then $\sum\frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)}\geq 3$.

Solution. We use the identities

$$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\quad\text{and}$$

$$\sum\frac{a}{2a+b+c}-\frac{3}{4}=-\sum\frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

Indeed

$$\sum\frac{a}{2a+b+c}-\frac{3}{4}=\sum\left(\frac{a}{2a+b+c}-\frac{1}{4}\right)=\sum\frac{a-b+a-c}{4(2a+b+c}=$$

$$=\sum\frac{a-b}{4(2a+b+c)}+\sum\frac{a-c}{4(2a+b+c)}=$$

$$=\sum\frac{a-b}{4(2a+b+c)}+\sum\frac{b-a}{4(a+2b+c)}=$$

$$=\sum\frac{a-b}{4}\left(\frac{1}{2a+b+c}-\frac{1}{a+2b+c}\right)=-\sum\frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

The inequality from the statement becomes successively

$$\sum\frac{a(2a+b+c)+a(2b+2c)}{(b+c)(2a+b+c)}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} \ge \frac{3}{2} - 2\sum \frac{a}{2a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} \ge 2\sum \frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

So, it suffices to show that

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \ge \frac{(a-b)^2}{(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

If $a=b$ we have equality; if $a \ne b$ it remains to prove that

$(2a+b+c)(a+2b+c) \ge (b+c)(c+a)$, true because

$2a+b+c > b+c$ and $a+2b+c > c+a$.

The proof is complete.

Solution. By Hölder's inequality we obtain:

$$\left(\sum \frac{1}{a(b+c)^5}\right)\left(\sum (b+c)\right)^4\left(\sum a(b+c)\right) \ge \left(\sum \sqrt[6]{\frac{1}{a(b+c)^5}\cdot (b+c)^4 \cdot a(b+c)}\right)^6$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{1}{a(b+c)^5}\right)\cdot 6^4 \cdot 2\left(\sum ab\right) \ge 3^6 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a(b+c)^5} \ge \frac{3^2}{2^5 \sum ab}.$$

Therefore it remains to show that

$\frac{9}{32\sum ab} \ge \frac{3}{32} \Leftrightarrow \sum ab \le 3 \Leftrightarrow 3\sum ab \le \left(\sum a\right)^2$, which is true, and the proof is complete.

PP.21784. Let a,b,c be three positive real numbers. Prove that

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{2a+b+c} \ge \sum_{cyclic} \frac{2}{3(a+b)+2c}.$$

Solution. We have:

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{2a+b+c} - \sum_{cyclic} \frac{2}{2a+3(b+c)} = \sum_{cyclic}\left(\frac{1}{2a+b+c} - \frac{2}{2a+3(b+c)}\right) =$$

$$= \sum \frac{b+c-2a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)} = \sum \frac{b-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)} +$$

$$+ \sum \frac{c-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)} = \sum \frac{b-a}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)} +$$

$$+ \sum \frac{a-b}{(2b+a+c)(2b+3a+3c)} =$$

$$= \sum \frac{(a-b)\left[(2a+b+c)(2a+3b+3c) - (2b+a+c)(2b+3a+3c)\right]}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)(2b+a+c)(2b+3a+3c)}.$$

But $(2a+b+c)(2a+3b+3c)-(2b+a+c)(2b+3a+3c)=$
$=a^2-b^2+2ac-2bc=(a-b)(a+b+2c)$.

Then: $\sum_{cyclic}\frac{1}{2a+b+c}-\sum_{cyclic}\frac{2}{2a+3(b+c)}=$

$=\sum\frac{(a-b)^2(a+b+2c)}{(2a+b+c)(2a+3b+3c)(2b+a+c)(2b+3a+3c)}\geq 0$, and we are done.

2. TEHNICI ŞI METODE DE REZOLVARE A UNOR INEGALITĂŢI GEOMETRICE PENTRU LICEU

Prof. Andrei Octavian Dobre,
Colegiul Național "Nichita Stănescu" Ploiești

2.1. INEGALITĂŢI GEOMETRICE REZOLVATE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE

P.2.1.1. Să se arate că într-un patrulater convex există relaţia: $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$. *(Inegalitatea lui Ptolemeu)*

Soluţie:

Fie z_A, z_B, z_C, z_D afixele punctelor A, B, C, D. Atunci

$$(z_C - z_A)\cdot(z_D - z_B) + (z_B - z_A)\cdot(z_C - z_D) +$$
$$+ (z_D - z_A)\cdot(z_B - z_C) = 0 \Rightarrow$$
$$(z_C - z_A)\cdot(z_D - z_B) = (z_B - z_A)\cdot(z_D - z_C) +$$
$$+ (z_D - z_A)\cdot(z_C - z_B)$$

Prin trecere la modul $\Rightarrow$

$$|z_C - z_A|\cdot|z_D - z_B| \leq |z_B - z_A|\cdot|z_D - z_C| + |z_D - z_A|\cdot|z_C - z_B| \Rightarrow AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

P.2.1.2.Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct nesituat pe cercul ccircumscris. Să se arate că se poate forma un triunghi cu segmentele [MA], [MB], [MC] (teorema D. Pompei).

Soluţie:

Fie *A(a),B(b),C(c), M(z)* cele patru puncte în planul complex.
Are loc inegalitatea
(z-a)(b-c)+(z-b)(c-a)+(z-c)(a-b)=0 (se demonstrează prin calcul direct)
De aici
(z-a)(b-c)=-(z-b)(c-a)-(z-c)(a-b)
Luând modului aici avem
$|z-a||b-c|=|(z-b)(c-a)+(z-c)(a-b)| \leq |(z-b)(c-a)|+|(z-c)(a-b)|$
Din AB=BC=AC rezultă că $|a-b|=|b-c|=|c-a|$
înmulţim prin $|b-c|$ si rezultă
$|z-a| \leq |z-b|+|z-c|$.
În această inegalitate avem egalitate dacă M aparţine cercului circumscris triunghiului ABC , caz în care patrulaterul ABMC este inscriptibil şi are loc teorema lui Ptolemeu

$$AM \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB, \text{adică } AM = MC + MB$$

Cum M nu aparţine cercului în inegalitate nu avem egalitate.

Din simetria relaíţiei (1) se deduc inegalităţile MB<MA+MC, MC<MA+MB ceea ce arată că segmentele [MA],[MB],[MC] determină un triunghi.

P.2.1.3 . Fie un triunghi ABC, A_1,B_1,C_1mijloacele laturilor (BC),(AC), respectiv (AC) si H ortocentrul triunghiului. Atunci $HA_1\cdot BC\leq HB_1\cdot BC+HC_1\cdot AB$.

Soluţie:

Se consideră ca origine centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC si M=H ortocentru triunghiului ABC.
Afixul H in acest caz este z=a+b+c şi relaţia $|z-a||b-c|\leq |(z-b)(c-a)|+|(z-c)(a-b)|$devine $|b+c||b-c|\leq |c+a|c-a|+|a+b||a-b|$ (1)
Dacă ţinem cont că afixele punctelor A_1,B_1,C_1sunt $\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2},\frac{b+a}{2}$ atunci relaţia (1) devine $HA_1\cdot BC\leq HB_1\cdot AC+HC_1\cdot AB$ unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

P.2.1.4. Dacă M este un punct din planul triunghiuli ABC, atunci $AM^2\sin A+BM^2\sin B+CM^2\sin C\geq 2S$, unde S este aria triunghiului.

Soluţie:

Daca x,y,z$\in\mathbb{C}$, atunci se poate demonstra uşor urmatoarea egalitate
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-z)=(x-y)(x-z)(y-z)$
Aplicând inegalitatea modulului obţinem
$|x-y||z-x||y-z|\leq|x^2||y-z|+|y^2||z-x|+|z^2||x-y|$. (2)
Fie m afixul lui M si a,b,c, afixele punctelor. Inlocuind a,b,c în relaţia (2) şi simplificăm prin 2R obţinem $AM^2\sin A+BM^2\sin B+CM^2\sin C\geq 2S$

P.2.1.5. Fie M un punct d în planul triunghiului ABC şi G centrul său de greutate, atunci avem inegalitatea $AM^3\sin A+BM^3\sin B+CM^3\sin C\geq 6MG\cdot S$

Soluţie:

Daca x,y,z$\in\mathbb{C}$, atunci se poate demonstra uşor urmatoarea egalitate
$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-z)=(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$ de unde
$|x^3(y-z)|+|y^3(z-x)|+|z^3(x-z)|\geq|x-y||y-z||z-x||x+y+z|$ (3)

Fie a,b,c,m afixele punctelor A,B,C respectiv M si x=m-a, y=m-b, z=m-c

Înlocuind x,y,z in (3) şi ţinând cont ca afixul lui G este $\frac{a+b+c}{3}$, obţinem

$AM^3 \sin A + BM^3 \sin B + CM^3 \sin C \geq 6MG \cdot S$

P.2.1.6. Fie O_1 si O_2 mijloacele diagonalelor AC si BD ale unui patrulater ABCD si M intersectia diagonalelor. Atinci $S_{ABCD} \geq 4 \cdot S_{O_1MO_2}$

Soluţie:

Fie m,a,b,c,d afixele punctelor M,A,B,C,D. Exprimand diagonalele in functie de afixele varfurilor, avem $BD \cdot AC = (|m-a|+|m-c|)(|m-b|+|m-d|)$.
Tinand cont de inegalitatea modulelor obtinem:

$(|m-a|+|m-c|)(|m-b|+|m-d|) \geq 4\left|m-\frac{a+c}{2}\right|\left|m-\frac{b+d}{2}\right|$, de unde deducem ca

$BD \cdot AC \geq 4MO_1 \cdot MO_2$

Inmultind relatia cu $\sin\alpha$ (α fiind unghiul dintre diagonale) obtinem inegalitatea din enunt.

P.2.1.7. Fie ABCD, O_1, O_2 mijloacele diagonalelor AC si BD , un patrulater inscris înr-un cerc de rază R şi r raza cercului circumscris triunghiului O_1MO_2. Să se arate că R>2r.

Soluţie:

Fie a,b,c,d afixele varfurilor A,B,C,D, atunci |a-b||b-c||c-a|+|c-d||d-a||a-c|=4RS$_{ABCD}$ de unde rezultă $2|c-a||d-b|\left|\frac{b+d}{2}-\frac{a+c}{2}\right| \leq 4RS_{ABCD}$ si deci $AB \cdot CD \cdot OO_1 \leq 2RS_{ABCD}$

Ţinând cont că $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}, unde\, \alpha = m(\angle O_1, \mathrm{MO}_2)$

$obţinem\, 2r \leq R$

P.2.1.8.Fie ABCD un paralelogram şi M un punct în planul său. Să se arate că $MA \cdot MC + MB \cdot MD \geq AB \cdot BC$.

Soluţie:

Fie *a*, *b*, *c*, *d* afixele vârfurilor *A*, *B*, *C*, *D* faţă de un reper arbitrar, *a* + *c* = *b* + *d*.
Avem: $MA \cdot MC + MB \cdot MD = |m-a| \cdot |m-c| + |m-b| \cdot |m-d| \geq |(m-a)(m-c)-(m-b)(m-d)| = |ac-bd| = |a-b| \cdot |c-b| = AB \cdot BC$.

P.2.1.9. Dacă ABC şi MNP sunt două triunghiuri echilaterale din acelaşi plan la fel orientate, să se arate că se poate forma un triunghi cu segmentele AM, BN, CP.

Soluţie::

$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_M - z_N} = \frac{z_A - z_C}{z_M - z_P} \Leftrightarrow (z_A - z_B)(z_M - z_P) = (z_M - z_N)(z_A - z_C) \Leftrightarrow$

$z_M(z_C - z_B) + z_N(z_A - z_C) + z_P(z_B - z_A) = o$. Cum

$z_A(z_C - z_B) + z_B(z_A - z_C) + z_C(z_B - z_A) = o$, prin scăderea celor două egalităţi $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&(z_M - z_A)(z_C - z_B) + (z_N - z_B)(z_A - z_C) + \\ &(z_P - z_C)(z_B - z_A) = o\end{aligned} \quad (*)$$

iar prin trecere la modul $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&|(z_M - z_A)| \cdot |(z_C - z_B)| \le |(z_N - z_B)| \cdot |(z_A - z_C)| + \\ &|(z_P - z_C)| \cdot |(z_B - z_A)| \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$AM \cdot BC \le BN \cdot AC + CP \cdot AB$. Triunghiul ABC este echilateral (AB=AC=BC) $\Rightarrow$ $AM \le BN + CP$. Din relaţia (*) pot fi scrise şi celelalte două inegalităţi ceea ce implică faptul că AM, BN şi CP pot fi laturile unui triunghi.

P.2.1.10. *Fie ABC un triunghi si P un punct arbitrar în planul său. Dacă* $\alpha PB \cdot PC + \beta PC \cdot PA + \gamma PA \cdot PB \ge \alpha\beta\lambda$ *, unde* α, β, λ *sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.*

Soluţie:

Fie a,b,c afixele varfurilor A,B, respectiv C.

Din $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1 \Rightarrow$

$\frac{|b||c|}{|a-b||a-c|} + \frac{|a||c|}{|b-c||b-a|} + \frac{|a||b|}{|c-a||c-b|} \ge 1$ (*)

$|a| = PA; |b| = PB; |c| = PC$ *şi*

$|b-c| = \alpha; |a-b| = \beta; |b-c| = \lambda$

Din relatia (*) avem $\frac{PB \cdot PC}{\beta\lambda} + \frac{PC \cdot PA}{\lambda\alpha} + \frac{PA \cdot PB}{\alpha\beta} \ge 1 \Leftrightarrow$

$\alpha PB \cdot PC + \beta PC \cdot PA + \gamma PA \cdot PB \ge \alpha\beta\lambda$

P.2.1.11. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC si R_1,R_2,R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor GBC, GCA respectiv GAB. Atunci $R_1+R_2+R_3\geq 3R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluţie:

Din problema *P.2.1.10.* avem $\alpha GB\cdot GC+\beta GC\cdot GA+\gamma GA\cdot GB\geq \alpha\beta\lambda$, unde α,β,λ sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.

$$\alpha\cdot GB\cdot GC=4R_1\cdot A_{\vartriangle GBC}=4R_1\cdot\frac{1}{3}A_{\vartriangle ABC}$$

$$\beta\cdot GC\cdot GA=4R_2\cdot\frac{1}{3}A_{\vartriangle ABC}$$

$$\beta\cdot GC\cdot GB=4R_2\cdot\frac{1}{3}A_{\vartriangle ABC}$$

$$\frac{4}{3}(R_1+R_2+R_3)\cdot A_{\vartriangle ABC}\geq 4R\cdot A_{\vartriangle ABC}$$

$$R_1+R_2+R_3\geq 4R$$

2..2. INEGALITĂŢI GEOMETRICE REZOLVATE CU AJUTORUL SUBSTITUŢIILOR RAVI

Propoziția 2.2.1. Numerele a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă există $x,y,z>0$ astfel încât $a=y+z,b=z+x,c=x+y.$

Demonstrație. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, luăm $x=p-a>0,y=p-b>0,z=p-c>0.$ Avem $y+z=p-b+p-c=a$ și analoagele.

Reciproc, dacă $a=y+z,b=z+x,c=x+y,$ atunci $2x=b+c-a>0$, adică $a<b+c$ și analoagele, relații ce arată că se poate forma un triunghi de laturi $a,b,c.$

În concluzie dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci pentru orice inegalitate geometrică există o inegalitate algebrică de forma $F(x,y,z)\geq 0$ sau $(\leq,>,<0)$. Substituțiile $a=y+z,b=z+x,c=x+y$ sunt cunoscute sub denumirea de substituțiile ***Ravi.***

P.2.2.1. Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Arătaţi că:

$$\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

Soluţie::

Ştim ca a+b>c

2(a+b)>a+b+c

a+b>s, unde s este semiperimetrul triunghiului

b+c>s

a+c>s

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=2$$

Notam b+c=x, a+c=y, a+b=z

$$a=\frac{z+y-x}{2}, b=\frac{z+x-y}{2}, c=\frac{x+y-z}{2}$$

şi obţinem $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{1}{2}(\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}-3)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$

Observaţie: Inegalitatea din partea dreaptă se numeşte Inegalitatea Nesbitt's

P.2.2.2. *Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi că*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$$

Soluţie:

Fie $a=x+y, b=y+z, c=z+x, unde\, x,y,z>0$

Atunci inegalitatea devine

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$$

Cum $m_a\geq m_g$ avem $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}=8xyz$

Egalitatea este adevarată dacă x=y=z. adica a=b=c

P.2.2.3. *Fie a,b,c lungimile leturilor unui triunghi. Arataţi că* $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

Soluţie:

Fie $a=x+y, b=y+z, c=z+x, unde\, x,y,z>0$

Atunci avem $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2<2((x+y)(y+z)+)y+z)(z+x)+(z+x)(x+y))$

Care este echivalent cu $xy+yz+zx>0, ceea\, ce\, este\, adevatat.$

P.2.2.4. *Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi că dacă este adevarată egalitatea* $2(ab^2+bc^2+ca^2)=a^2b+b^2c+c^2a+3abc$ *, atunci triunghiul este echilateral.*

Soluţie:

$Stim\, că\; a^2b+b^2c+c^2a+3abc \geq 2(ab^2+bc^2+ca^2),$ cu egalitate doar daca a=b=c

Utilizăm substituţii Ravi, iar inegalitatea devine

$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x \geq 2(x^2z+y^2x+z^2y)$

Cum $m_a \geq m_g$

$x^3+z^2x \geq 2x^2z, y^3+x^2y \geq 2y^2z, z^3+y^2z \geq 2z^2y$

Dupa ce adunăm aceste inecuaţii obţinem

$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x \geq 2(x^2z+y^2x+z^2y).$

Egalitatea este adevarata pentru x=y=z , adica a=b=c, ceea ce trebuia să demonstrăm.

P.2.2.5. *Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi inegalitatea*

$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}+\sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

Soluţie:

Fie $a=x+y, b=y+z, c=z+x, unde\, x,y,z>0$

Atunci inegalitatea este echivalentă cu

$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}, x,y,z>0$

Cum $m_p \geq m_a$ avem $\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \Rightarrow \sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}}$

Analog obţinem $\sqrt{y+z} \geq \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{z+x} \geq \frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

Adunam relaţiile şi obţinem $\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}, x,y,z>0$

P.2.2.6. *(Hadwinger-Finsler) Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstraţi inehalitatea* $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Soluţie:

Inegalitatea dată este echivalentă cu $2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}P$

Utilizând substituţiile Ravi $a=x+y, b=y+z, c=z+x, unde\, x,y,z>0$ inecuaţia devine

$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$ ceea ce este adevărat datorită faptului că

$$(xy+yz+zx)^2-3xyz(x+y+z)=\frac{(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2}{2}$$

Egaliatea este adevarată dacă z=y=z, adică a=b=c.

Folosind propoziția *Propoziția 2.2.1.* vom scrie în funcție de x,y,z unele relații cunoscute din geometria triunghiului.

- $p=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}$
- $R=\frac{abc}{4S}=\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}$
- $r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}$
- $r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}$
- $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$
- $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{x\sum x}{(x+y)(x+z)}}$
- $tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{yz}{x\sum x}}$

În continuare vom demonstra câteva inegalități geometrice folosind substituțiile *Ravi* și inegalități algebrice clasice. Notațiile sunt cele obișnuite într-un triunghi iar unele enunțuri vor fi ușor modificate.

P.2.2.7. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\prod(h_a-2r)\le r^3$$

Marius Olteanu, Arhimede nr. 9-10, 2003

Soluție: Să exprimăm h_a în funcție de x,y,z. Avem $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{y+z}$ și analoagele.

Atunci inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\prod\left(\frac{2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{y+z}-2\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}\right)\le\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}\cdot\prod\left(\frac{\sum x}{y+z}-1\right)\le\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}}^{3}$$

$$\Leftrightarrow 8\prod\frac{x}{y+z}\le 1\Leftrightarrow\prod(x+y)\ge 8\prod x$$

Ultima inegalitate se obține din aplicarea inegalității mediilor MA-MG, mai exact avem $x+y\ge 2\sqrt{xy}, y+z\ge 2\sqrt{yz}, z+x\ge 2\sqrt{zx}$ și înmulțind aceste inegalități obținem $\prod(x+y)\ge 8\prod x$.

P.2.2.8. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}\sum\frac{a^2}{bc}\ge 2-\frac{r}{R}$$

I.V. Maftei și P.G. Popescu, La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola

Soluție: Avem $\frac{1}{2}\sum\frac{a^2}{bc}\ge 2-\frac{r}{R}\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{bc}+\frac{2r}{R}\ge 4$. Ultima inegalitate se scrie succesiv

$$\sum\frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{\dfrac{2\sqrt{\dfrac{\prod x}{\sum x}}}{\prod(x+y)}}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}\ge 4\Leftrightarrow\sum\frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{8\prod x}{\prod(x+y)}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum(y+z)^2}{\prod(x+y)}+\frac{8\prod x}{\prod(x+y)}\ge 4\Leftrightarrow\sum(y+z)^2+8\prod x\ge 4\prod(x+y)$$

după care folosind identitățile $\sum(y+z)^3=2\sum x^3+3\sum xy(x+y)$ și $\prod(x+y)=\sum xy(x+y)+2\prod x$ ultima inegalitate se scrie echivalent

$$2\sum x^3+3\sum xy(x+y)+8\prod x\ge 4\sum xy(x+y)+8\prod x\Leftrightarrow 2\sum x^3\ge\sum xy(x+y)\qquad(1)$$

Arătăm că $x^3+y^3\ge xy(x+y)$. Avem

$x^3+y^3\ge x^2y+y^2x\Leftrightarrow(x-y)\left(x^2-y^2\right)\Leftrightarrow(x-y)^2(x+y)\ge 0$ ce evident are loc. Similar, $y^3+z^3\ge y^2z+yz^2$ și $x^3+z^3\ge x^2z+xz^2$, iar după suma acestor inegalități rezultă (1).

P.2.2.9. . Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$2\left(\sum r_a\right)\left(\sum \frac{r_a}{a}\right) \geq 9p$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Gazeta Matematică nr. 4, 2005

Soluție: Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$2\left(\sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}\right)\left(\sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x(y+z)}\right) \geq 9\sum x \Leftrightarrow 2\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)\left(\sum \frac{1}{x}\right)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) \geq 9\sum x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum xy\right)\left(\sum \frac{1}{x(y+z)}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \left(\sum xy\right)\left(\sum \frac{1}{xy}\right) \geq 9$$

unde am folosit identitățile $\left(\prod x\right)\left(\sum \frac{1}{x}\right) = \sum xy$ și $\sum x(y+z) = 2\sum xy$. Ultima inegalitate rezultă ușor aplicând inegalitatea mediilor MH-MA pentru numerele xy, yz, zx.

P.2.2.9. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{4r - R}{R} \leq \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$$

A. Roșianu, The American Mathematical Monthly, 2007

Soluție: Inegalitatea din dreapta se scrie $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ care este tocmai inegalitatea mediilor MA-MG pentru numerele y și z. Inegalitatea din stânga o scriem succesiv

$$\frac{y+z}{2} \cdot \frac{4\sqrt{\frac{\prod x}{\sum x}} - \frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}}{\frac{\prod(x+y)}{4\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}} \leq \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \cdot \frac{16\prod x - \prod(x+y)}{\prod(x+y)} \leq \sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow 16\prod x - \prod(x+y) \leq 2(x+y)(x+z)\sqrt{yz} \Leftrightarrow 16\prod x \leq (x+y)(x+z)\left(2\sqrt{yz} + y + z\right)$$

Folosind inegalitatea mediilor MA-MG, avem $y + z \geq 2\sqrt{yz}$ și analoagele.

Atunci

$$(x+y)(x+z)\left(2\sqrt{yz} + y + z\right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 4\sqrt{yz} = 16\prod x$$

și soluția se încheie.

P.2.2.10. . Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum r_a l_a \le p^2$$

Viorel Gh. Vodă, Vraja geometriei demodate, pag. 215

Soluţie: Pentru început să găsim o inegalitate în funcţie de x, y şi z pentru l_a. Avem

$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\sqrt{p(p-a)} \le \sqrt{p(p-a)}$, unde am folosit inegalitatea mediilor MA-MG: $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \le 1$, deci $l_a \le \sqrt{x\sum x}$ şi analog $l_b \le \sqrt{y\sum x}, l_c = \sqrt{z\sum x}$. Avem

$$\sum r_a l_a \le \sum \frac{\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\prod x\right)}}{x}\cdot\sqrt{x\sum x} = \left(\sum x\right)\left(\sum\sqrt{yz}\right) \le \left(\sum x\right)\left(\sum\frac{y+z}{2}\right) = \left(\sum x\right)^2 = p^2$$

unde am folosit inegalitatea mediilor MA-MG: $\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}$ şi identitatea $\sum\frac{y+z}{2} = \sum x$.

2.3. INEGALITĂŢI GEOMETRICE REZOLVATE CU AJUTORUL UNOR SUBSTITUŢII TRIGONOMETRICE

În acest capitol vom expune o metodă generală de demonstare a unor inegalităţi geometrice şi vom rezolva prin intermediul ei câteva teoreme foarte importante cum ar fi Gerrestel şi Blundon. Această metoda este una destul de complicată şi necesită conoştinţe foarte bune de trigonometrie. Metoda constă în transformarea prin calcul trigonometric a inegalităţii enunţate într-o inegalitate care depinde numai de unghiurile unui triiunghi de forma $f(A,B,C) \ge 0$.

Prin justificarea acestei inegalităţi vom intercala expresia $f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})$, astfel că demonstrarea inegalităţii se face în două etape.

1) Demonstrarea inegalităţii $f(A,B,C) \ge f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})$

2) Demonstrarea inegalităţii $f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}) \ge 0$ cu egalitate pentru B=C.

Pentru început vom demonstra , cu ajutorul acestei metode, inegalitatea Gerretsen.

2.3.1. Teorema (Gerretsen)

Să se demonstraze că în orice triunghi are loc inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \le 8R^2+4r^2$.

Demontraţie:

Vom considera $f:\Delta \to \mathbb{R}, \Delta=\{(A,B,C)\in(0;\pi)^3 / A+B+C=\pi\}$
$A=\min\{A,B,\mathrm{C}\}$

Deoarece $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Inegalitatea din enunt se scrie sub forma echivalentă $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le 2+16\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$.

Vom considera $f(A,B,C)=2+16\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C$.

$$\Delta = f(A,B,C)-f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})=16\sin^2\frac{A}{2}(\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\sin^4\frac{B+C}{2})-$$
$$-\sin^2 B-\sin^2 C+2\cos^2\frac{A}{2}=2(2\cos A-1)(1-\cos^2\frac{B-C}{2})+8\sin^3\frac{A}{2}(1-\cos\frac{B-C}{2})$$

Dar $A=\min\{A,B,\mathrm{C}\}$, rezultă $A\le\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos A\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\Delta\ge 0$

Arătăm că $f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})\ge 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2+16\sin^2\frac{A}{2}\sin^4\frac{B+C}{2}-\sin^2 A-\sin^2\frac{B+C}{2}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+4\sin^2\frac{A}{2}(1-\cos\frac{B+C}{2})^2-4\sin^2\frac{A}{2}(1-\sin^2\frac{A}{2})-2(1-\sin^2\frac{A}{2})$$

Notăm $\sin\frac{A}{2}=t$.

$$f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})=2+4t^2(1-t)^2-4t^2(1-t^2)-2(1-t^2)=$$
$$=2t^2(2t+1)^2\ge 0.$$

2.3.2.Teoremă (Blundon)

Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea $p \le 2R + (3\sqrt{3} - 4)$.

Demonstraţie:

Considerăm $A = \min\{A, B, C\}$.

Inegalitatea este echivalentă cu $\sin A + \sin B + \sin C \le 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Definim funcţia: $f : \Delta \to \mathbb{R}, \Delta = \{(A, B, C) \in (0;\pi)^3 \,/\, A + B + C = \pi\}$

$$f(A, B, C) = 2 + 4 + (3\sqrt{3}\ -4)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin A - \sin B - \sin C.$$

Calculam: $\Delta = f(A, B, C) - f(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}) =$

$$= 4(3\sqrt{3-4})\ \sin\frac{A}{2}(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin^2\frac{B+C}{4}) + 2\cos\frac{A}{2} - \sin B - \sin C$$

$$= 2(3\sqrt{3}\ -4)\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B-C}{2} - 1) + 2\cos\frac{A}{2}(1 - \cos\frac{B-C)}{2} =$$

$$=2(1\text{-}\cos\frac{B-C}{2})\left[\cos\frac{A}{2} - (3\sqrt{3} - 4)\sin\frac{A}{2}\right].$$

Aratam ca: $\cos\frac{A}{2}\text{-}(3\sqrt{3}\text{-}4)\sin\frac{A}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}-4}$.

Dar: $\frac{A}{2} \le \frac{\pi}{6}$.Rezulta:$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{3\sqrt{3}-4}$.

Ne mai ramane sa demonstram ca:

$$f(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}) \ge 0 \Leftrightarrow 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B+C}{4} - \sin A - 2\sin\frac{B+C}{2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\frac{y}{2}n^2 - 2p(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\cos\frac{y}{2})n + p^2\sin^2\frac{\beta}{2} \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4(3\sqrt{3} - 4)\sin\frac{A}{2}(1 - \sin\frac{A}{2}) - \sin A - 2\cos\frac{A}{2} \ge 0.$$

Notam: $\sin\frac{A}{2}$=t.

Inegalitatea de demonstrat devine:

$$2 + 2(3\sqrt{3} - 4)t(1 - t) \ge 2\sqrt{1 - 1^2}(1 + t) \Leftrightarrow \left[1 + (3\sqrt{3} - 4)(1 - t^2\right]^2 \ge$$

$$\ge (1 - t^2)(t + 1)^2 \Leftrightarrow (43 - 24\sqrt{3})t^2 + (43 - 24\sqrt{3})t^4 - (86 - 48\sqrt{3})t^3 + (6\sqrt{3} - 8)t -$$

$-(6\sqrt{3}-8)t^2 \geq t^4+2t-2t^3 \Leftrightarrow (44-24\sqrt{3})t^3+(48\sqrt{3}-84)t^2+(51-30\sqrt{3})t+$

$+6\sqrt{3}-10 \geq 0 \Leftrightarrow \left[(44-24\sqrt{3})t^2+(36\sqrt{3}-62)t+20-12\sqrt{3}\right](t-\frac{1}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(t-\frac{1}{2})^2\left[(11-6\sqrt{3})t+(6\sqrt{3}-10)\right] \geq 0$,ceea ce încheie demonstraţia.

Bibliografie:

1. Aplicatii ale numerelor complexe in matematica de liceu, Marcel Chirita, Dumitru Gheorghiu, Ed. Sigma, 2004, Bucuresti
2. Proving some geometric inequalities by using complex numbers; Titu Andreescu and Dorin Andrica; Educaţia MatematicăVol. 1, Nr. 2 (2005), 19–26
3. Revista Electronică MateInfo.ro, www.mateinfo.ro
4. Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach, Radmila Bulajich Manfrino, Jose Antonio Goomez Ortega, Regelio Valdez Delgado
5. Inegaltăţi matematice, tehnici şi metode de demonstraţie şi rafinare, Editura Didactică şi Pedagogică 2012, Marius Dragan, I.V. Maftei, Sorin Rădulescu