REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

ISSN 2065-6432

DECEMBRIE 2015

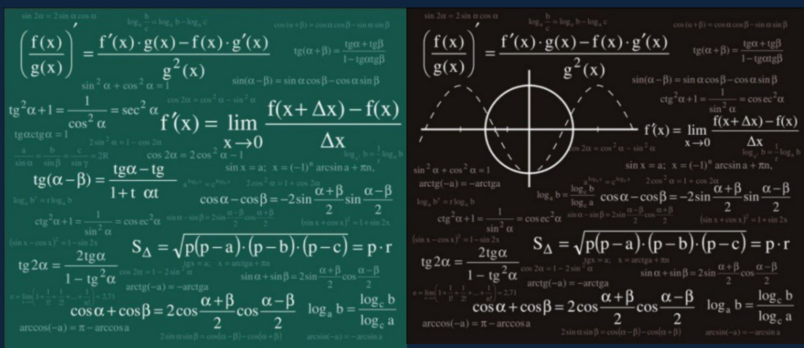
PESTE 5 ANI DE APARIȚII LUNARE!

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro

WWW.MATEINFO.RO



Articole:

1.Soluții pentru problema E: 14819 din Gazeta Matematică

de Nela Ciceu şi Roxana Mihaela Stanciu

În nr. 4/2015 al GM-B a apărut următoarea problemă

"Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și AD⊥BC, $D \in BC$. *Dacă* $E \in (AB)$ *și* $F \in (AC)$ *astfel încât DE este bisectoarea unghiului ADB și DF este bisectoarea unghiului ADC, demonstrați că triunghiul AEF este isoscel."*

Petru Braica

În nr. 10 al aceleiași reviste au apărut doua soluții: una la nivelul clasei a VI-a (foarte ingenioasă, dar necesitând inspirația de a considera un anume punct pe segmentul EF) și una folosind un patrulater inscriptibil.

Scopul acestor rânduri este prezentarea unor soluții diferite de cele apărute.

I. (cu teorema bisectoarei). Folosind și teoreme cunoscute intr-un triunghi dreptunghic, avem

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{BD + AD} = \frac{c \cdot \frac{bc}{a}}{\frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a}} = \frac{bc}{b+c},\ AF = \frac{bc}{b+c}.$$

II. (cu asemănare)

(a) Folosind formula pentru lungimea bisectoarei, obținem

$$\frac{DE}{DF} = \frac{2AD \cdot BD \cos 45^\circ}{BD + AD} \cdot \frac{AD + DC}{2AD \cdot DC \cos 45^\circ} = \frac{\frac{c^2}{a}\left(\frac{bc}{a} + \frac{b^2}{a}\right)}{\frac{b^2}{a}\left(\frac{bc}{a} + \frac{c^2}{a}\right)} = \frac{c}{b}.$$

Deducem că triunghiul EDF este asemenea cu triunghiul BAC, deci <EFD = C. Rezultă că <AFE = <AFD - <EFD = C+45^0 - C = 45^0.

(b) Triunghiurile dreptunghice BDA și ADC sunt asemenea, având raportul de asemanare c/b. Bisectoarele duse din vârful unghiului drept au același raport, adică DE/DF=c/b și continuăm ca mai sus.

(c) Triunghiurile DEA și FDC sunt asemenea (<EDA = <FDC = 45^0 si <EAD = <DCF). Rezultă DE/DF = c/b.

2. Câteva probleme interesante cu [Partea întreagă...]

Prof. Andrei Octavian Dobre
Colegiul Național "Nichita Stănescu" Ploiești

În problemele ce vor urma notăm [x] cu parea întreagă a numărului real x.

1. Fie $0<a<1$ **și** $\left[a+\frac{1}{50}\right]+\left[a+\frac{2}{50}\right]+\ldots+\left[a+\frac{39}{50}\right]=6$ **.Calculați [50a].**

Soluție: $0<a+\frac{1}{50}<a+\frac{2}{50}<\ldots<a+\frac{39}{50}<2$

$\left[a+\frac{1}{50}\right],\left[a+\frac{2}{50}\right],\ldots,\left[a+\frac{39}{50}\right]$ au valoarea 0 sau 1.

Cum $\left[a+\frac{1}{50}\right]+\left[a+\frac{2}{50}\right]+\ldots+\left[a+\frac{39}{50}\right]=6$ implică faptul că șase dintre termenii $\left[a+\frac{1}{50}\right],\left[a+\frac{2}{50}\right],\ldots,\left[a+\frac{39}{50}\right]$ sunt 1 iar restul sunt 0.

Să considerăm $\left[a+\frac{1}{50}\right]+\left[a+\frac{2}{50}\right]+\ldots+\left[a+\frac{33}{50}\right]=0$ și $\left[a+\frac{34}{50}\right]+\left[a+\frac{35}{50}\right]+\ldots+\left[a+\frac{39}{50}\right]=1$

$0<a+\frac{33}{50}<1$ și $1\le a+\frac{34}{50}<2$

De unde obținem $16\le 50a<17,$ **.**

Deci $[50a]=16$**.**

2. Fie $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots+\frac{1}{2015^2}$ **. Aflați [S].**

Soluție:

$$1<S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots+\frac{1}{2015^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}=$$
$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}=1\frac{2014}{2015}$$

Deci [S]=1.

3. $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{994009}}$. **Aflați [S].**

Soluție:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\Leftrightarrow\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

$$\sqrt{1+1}-\sqrt{1}<\frac{1}{2\sqrt{1}}<\sqrt{1}-\sqrt{1-1}$$

$$\sqrt{2+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\sqrt{2}-\sqrt{2-1}$$

…

$$\sqrt{994009+1}-\sqrt{994009}<\frac{1}{2\sqrt{994009}}<\sqrt{994009}-\sqrt{994009-1}$$

Adunăm relațiile și obținem

$$997-1<\frac{1}{2}S<997-\frac{1}{2}\Rightarrow 1992<2\sqrt{994010}-2<S<1993$$
$$[S]=1992$$

4. Calculați suma:

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{n^2-1}].$$

Soluție:

$$([\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}])+([\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]+[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]+[\sqrt{8}])+...$$
$$+[\sqrt{(n-1)^2}]+[\sqrt{(n-1)^2+1}]+...+[\sqrt{(n^2-1}])=$$
$$3\cdot 1+5\cdot 2+...+(n^2-1-(n-1)^2+1)(n-1)=$$
$$3\cdot 1+5\cdot 2+...+(2n-1)(n-1)=$$
$$\sum_{k=2}^{n}(2k-1)(k-1)=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

Bibliografie:

1. **Matematică, exerciții și probleme cls. A IX A , Schneider– Editura Valeriu**
2. **Elementary Algebra Exercise – Wenlog Wang, Hao Wang**

2. NUMERE CELEBRE (Partea întâi)

Profesor Şerban George-Florin ,
Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" ,Brăila

1)Numere pitagorice .

Trei numere naturale se numesc pitagorice daca verifica ecuatia $x^2+y^2=z^2$ **.**

Aratati ca cel putin un numar x, y sau z este divizibil cu 3 .

Soluţie : Solutiile ecuatiei sunt : $x=t\cdot(u^2-v^2)$, $y=t\cdot 2uv$, $z=t\cdot(u^2+v^2)$, $t,u,v\in N$.
Presupun ca t,u si v nu sunt divizibile cu 3 (in caz contrar reiese ca x, y sau z este divizibil cu 3). Daca u=3n+1 si v=3m+1 atunci $x\vdots 3$**. Daca u=3n+2 si v=3m+2 atunci** $x\vdots 3$**. Daca u=3n+1 si v=3m+2 (sau invers) atunci** $x\vdots 3$**.**

2)Numere Armstrong .

Un numar natural n avand k cifre se numeste Armstrong daca este egal cu suma cifrelor sale ridicate la puterea k . Aflati cel mai mic numar Armstrong de trei cifre .

Soluţie : $\overline{abc}=a^3+b^3+c^3$ **. Daca a=1 ,** $\overline{1bc}=1+b^3+c^3$ **,** $100+10b+c=1+b^3+c^3$ **,**

$99+9b=b^3-b+c^3-c=b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$ **par ,** $99+9b=9\cdot(b+11)$ **par , deci b impar . Daca b=1 ,** $\overline{11c}=2+c^3$ **,** $108+c=c^3$ **,** $c(c-1)(c+1)=108$**. Daca c=4 , 60=108 (F) , daca** $c\geq 5$ **,** $c(c-1)(c+1)=108\geq 120$ **(F) . Daca b=3 ,** $\overline{13c}=28+c^3$ **,**

$102=c(c-1)(c+1)$**. Daca c=4 , 60=102 (F) , daca** $c\geq 5$ **,** $c(c-1)(c+1)=102\geq 120$ **(F).**

Daca b=5 , $\overline{15c}=126+c^3$ **,** $24=c(c-1)(c+1)$ **. Daca c=3 , 24=24 (A) . .Daca** $c\geq 4$ **,** $c(c-1)(c+1)=24\geq 60$ **(F). Deci am gasit numarul 153 .**

3) Numere bune .

Spunem ca un numar natural este "bun " daca pentru orice divizor a a lui n , a+1 este divizor al lui n+1. Determinati toate numerele naturale bune .

Olimpiada Rusia 2014

Soluţie : Vom arata ca toate numerele bune sunt 1 si toate numerele prime impare .

Daca n=1 , 1|1 si 2|2 (A) . Daca n=2 ,1|2 , 2|3 (F). Daca n=p prim impar , 1|p , 2|(p+1) (A) si p|p , p+1|p+1 (A). Dar 1|n , 2|n+1 , deci n impar . Presupun ca n este un numar compus , fie a un divizor propriu a lui n . Deci a|n , a|a rezulta a|n-a . Dar a+1|n+1 , a+1 |a+1 , a+1|n-a . Atunci $(n-a) \vdots a$, $(n-a) \vdots (a+1)$, $(n-a) \vdots [(a+1), a] = a \cdot (a+1)$

$n-a = a(a+1)x$, $x \in N$, $n = a(a+1)x + a$, $n = a \cdot [(a+1)x+1]$, $[(a+1)x+1] \mid n$,

$[(a+1)x+2] \mid n+1$, $[(a+1)x+2] \mid a(a+1)x+a+1$, $[(a+1)x+2] \mid (a+1)x+2$,

$[(a+1)x+2] \mid a(a+1)x+2a-a(a+1)x-a-1$, $[(a+1)x+2] \mid a-1$, $(a+1)x+2 \le a-1$

Fals deoarece $(a+1)x+2 > a-1$, $(a+1)x > ax > a$, **2>-1 . Deci n nu poate fi numar compus.**

4)Numere factoriale .

Numerele naturale $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ..... \cdot n$ **se numesc numere factoriale .**

Aflati cel mai mare numar natural n stiind ca $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot 30 \vdots 10^n$ **.**

Soluţie : **"Daca p este numar prim aunci exponentul lui p in produsul** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ..... \cdot n$ **este egal cu** $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + ...$ **"**

Exponentul lui 2 in 30! este $[\frac{30}{2}] + [\frac{30}{4}] + [\frac{30}{8}] + [\frac{30}{16}] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$

Exponentul lui 5 in 30! este $[\frac{30}{5}] + [\frac{30}{25}] = 6 + 1 = 7$ .Deci $30! = 2^{26} \cdot 5^7 \cdot x$, (x,10)=1

$30! = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 2^{19} \cdot x = 10^7 \cdot 2^{19} \cdot x \vdots 10^7$, n=7 .

5)Numere automorfe .

Un numar automorf este numarul natural al carui patrat se termina in aceleasi cifre ce compun numarul insusi . Aflati cel mai mic numar automorf de doua cifre .

Soluţie : Daca $\overline{ab}^2 = \overline{cab}$, $u(\overline{ab}^2) = u(\overline{cab}) = u(b^2) = b \in \{0,1,5,6\}$, $\overline{ab}^2 - \overline{ab} = 100c$,

$\overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100c$ **. Daca** $\overline{ab} = 10$, $90 = 100c$ **(F). Daca** $\overline{ab} = 11$, $110 = 100c$ **(F).Daca** $\overline{ab} = 15$, $210 = 100c$ **(F). Daca** $\overline{ab} = 16$, $240 = 100c$ **(F). Daca** $\overline{ab} = 20$, $380 = 100c$ **(F).Daca** $\overline{ab} = 21$, $420 = 100c$ **(F). Daca** $\overline{ab} = 25$, $600 = 100c$ **c=6 (A). Deci** $\overline{ab} = 25$, $25^2 = 625$ **(A) .**

6)Numere puternice .

Un numar puternic este un intreg pozitiv cu proprietatea ca daca este divizibil cu numarul prim p atunci este divizibil si cu p^2. Aflati toate numerele puternice de trei cifre care au 6 divizori naturali .

Soluţie : Numerele cu 6 divizori sunt de forma $p^2 \cdot q$ **sau** p^5. **Daca** $n = p^2 \cdot q$ **fals deoarece** $n \vdots q$ **dar n nu este divizibil cu** q^2. **Daca** $n = p^5$ **, p=3 , n=243 .**

Daca $p \geq 5$ **atunci** $n \geq 3125$ **fals . Deci n=243 .**

7) Numere rare .

Numerele non-palindromice n cu proprietatea ca R(n)+n si R(n)-n sunt ambele patrate perfecte , unde R(n) este reversul lui n . Aflati numerele de doua cifre rare .

Soluţie : $\overline{ba} + \overline{ab}$ **si** $\overline{ba} - \overline{ab}$ **sunt patrate perfecte. Deci** $\overline{ba} + \overline{ab} = 11 \cdot (a + b)$ **p.p**

Rezulta a+b=11. Dar $\overline{ba} - \overline{ab} = 9 \cdot (b - a)$ **rezulta b-a este p.p ,** $b - a \in \{0,1,4\}$

Daca b-a=0 , b=a=5,5 (F) . Daca b-a=1 , atunci a=5 si b=6 , numarul 56 este rar.

Daca b-a=4 , atunci a=3,5 (F) .

8)Numere egiptene .

Se numesc numere egiptene numerele ce se pot scrie ca suma numitorilor unor fractii avand numaratorul egal cu 1 , fractii a caror suma este un numar intreg pozitiv. De exemplu 11=2+3+6 si $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ **, 11 este un numar egiptean . a) Aratati ca 24 este un numar egiptean .**

b) Aratati ca orice numar de forma $\frac{n \cdot (n^2 + 2)}{3}$ **,** $n \in N \setminus \{0,1,2\}$ **este egiptean .**

Soluţie : a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \in N$ **. Deci n=2+6+12+4=24 este egiptean.**

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + .. + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \in N$

Deci numarul $x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + .. + (n-1) \cdot n + n = (1^2 + 2^2 + .. + n^2) - (1 + 2 + .. + n) + n$

$$x=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(2\mathrm{n}^2+3n+1)-3n(n+1)+6n}{6}=\frac{n(2\mathrm{n}^2+3n+1-3n-3+6)}{6}$$

$x=\frac{n(2\mathrm{n}^2+4)}{6}=\frac{n(\mathrm{n}^2+2)}{3}$ **este numar egiptean .**

9)Numere aproape perfecte .

Un numar n se numeste aproape perfect daca $2n-1=\sigma(n)$ **, unde** $\sigma(n)$ **reprezinta suma divizorilor naturali a lui n . Aratati ca exista o infinitate de numere aproape perfecte .**

Soluție : $n=2^x$ **,** $x\in N$ **,** $2\cdot 2^x-1=\sigma(2^x)=1+2+2^2+....+2^x=2^{x+1}-1$ **(A)**

Deci exista o infinitate de numere $n=2^x$ **,** $x\in N$

Bibliografie : "Enciclopedia matematica a claselor de numere intregi " , Marius Coman.

3. O problemă de geometrie cu mai multe rezolvări (1)

Se dă triunghiul ABC, ascuţitunghic. Se construiesc înălţimile $[CC_1]$, $[BB_1]$ şi medianele [CN], [BM], M, $B_1 \in (AC)$, C_1, N $\in$ (AB). Dacă $\{P\} = CC_1 \cap BM$ şi $\{Q\} = = BB_1 \cap CN$, atunci triunghiul ABC este isoscel dacă şi numai dacă PQ || BC.

Prof. Manea Cosmin , Petrică Dragoş, Piteşti

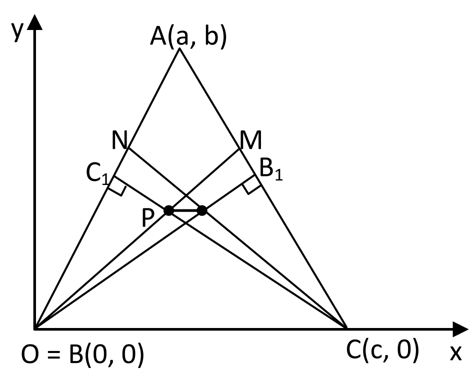
Soluţie autori:

Demonstrăm afirmaţia „triunghiul ABC este isoscel $\Rightarrow$ PQ || BC”.

Fie $\{G\} = CN \cap BM \Rightarrow BG = CG$ (1)

Din congruenţa triunghiurilor BPC_1 şi CQB_1 (caz CU), rezultă că BP = CQ (2).

Din (1) şi (2) deducem că $\frac{BP}{BG} = \frac{CQ}{GC}$, adică PQ || BC.



Demonstrăm acum afirmaţia reciprocă printr-o soluţie „analitică”.

Fie B(0, 0), A(a, b), C(c, 0).

Putem presupune, fără a restrânge din generalitate, că a şi c au acelaşi semn, iar b > 0.

Vom lua a > 0, c > 0.

Dacă PQ || BC $\Rightarrow y_P = y_Q$ (*)

Avem $M\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b}{2}\right); N\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Ecuaţia dreptei AB este ay – bx = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow m_{CC_1} = -\frac{a}{b} \Rightarrow CC_1$: $y - 0 = -\frac{a}{b}(x-c) \Leftrightarrow CC_1$: by + a(x – c) = 0.

De asemenea, BM: $\dfrac{\frac{b}{2}-0}{y-0}=\dfrac{\frac{a+c}{2}-0}{x-0}$ ⇔ BM: y(a + c) – bx = 0. Cum $CC_1 \cap BM = \{P\} \Rightarrow y_P$ reprezintă necunoscuta y a sistemului: $\begin{cases} by = ac - ax \\ y(a+c) = bx \end{cases}$; x = $\dfrac{y(a+c)}{b}$ ⇒ by +

$$+\ \frac{ay(a+c)}{b} = ac \Rightarrow yb^2 + a^2y + acy = abc \Rightarrow y(b^2+a^2+ac) = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{abc}{a^2+b^2+ac} = y_P \ (**).$$

Fie acum CN: $\dfrac{\frac{b}{2}-0}{y-0}=\dfrac{\frac{a}{2}-c}{x-c}$ ⇔ CN: b(x – c) = y(a – 2c).

De asemenea, $m_{AC} = \dfrac{b}{a-c} \Rightarrow m_{BB_1} = \dfrac{c-a}{b}$.

Prin urmare, ecuaţia dreptei BB_1: y – 0 = $\dfrac{c-a}{b}$(x – 0) ⇔ BB_1: by = x(c – a). Luând sistemul: $\begin{cases} b(x-c) = y(a-2c) \\ by = x(c-a) \end{cases}$, găsim că y = $\dfrac{bc(c-a)}{-b^2+3ac-a^2-2c^2} = y_Q$ (***).

Presupunem ca $2a \neq c$.

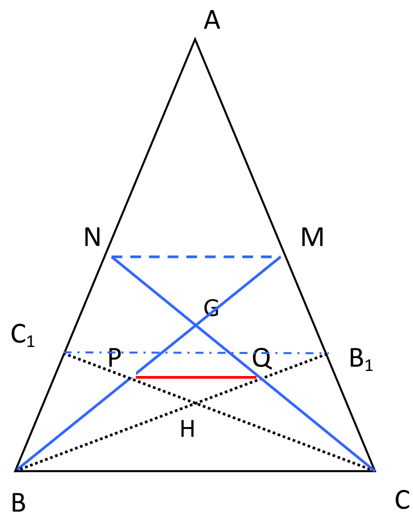
Din (*), (**), (***) obţinem

$\dfrac{a}{a^2+b^2+ac} = \dfrac{a-c}{-b^2+3ac-a^2-2c^2} = \dfrac{2a-c}{2c(2a-c)} = \dfrac{1}{2c}$; 2a ≠ c. Obţinem $2ac = a^2 + b^2 + ac \Leftrightarrow a^2 + b^2 = ac \Leftrightarrow AB^2 = y_A \cdot BC$ ⇔

⇔ $AB^2 = pr_{BC}AB \cdot BC$. Conform reciprocei teoremei catetei, din ultima relaţie, obţinem că ΔABC este dreptunghic (contradicţie). Prin urmare, 2a = c. Atunci $AB^2 = a^2 + b^2$, iar $AC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = AC$.

Alte soluţii:

1) Prof. Viorica Ciocănaru, Craiova



$BM \cap CN = \{G\}$, $M \in AC, AM = MC$

$N \in AB, AN = NB$

$BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$

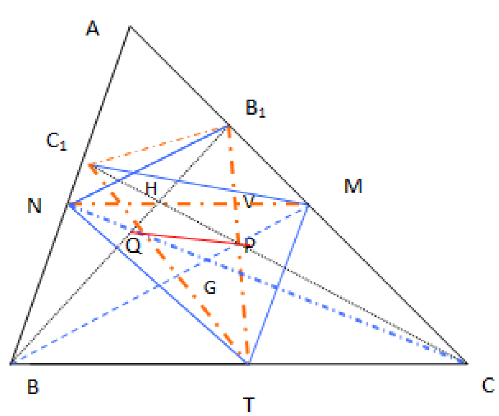
$BM \cap CC_1 = \{P\}$, $CN \cap BB_1 = \{Q\}$

a) Dacă $\Delta\ ABC$ este isoscel trebuie arătat că $PQ \parallel BC$.

Dacă $\Delta\ ABC$ este isoscel $\angle ABC \equiv \angle ACB$, $BM = CN$, $\angle ABM \equiv \angle ACN$, $\angle BB_1C \equiv \angle CC_1B$ dr. *(CC)* rezultă BCB_1C_1 trapez isoscel.

$\Delta\ BPC_1 \equiv \Delta\ CQB_1$ dr. *(IC)* $\Rightarrow$ $BP = CQ$;

$\Delta\ BB_1M \equiv \Delta\ CC_1N$ dr. *(IC)* $\Rightarrow$ $\angle MBB_1 \equiv \Delta\ NCC_1 \Rightarrow \Delta\ BPH \equiv \Delta\ CQH$ *(LUU)* $\Rightarrow$ $BH = CH$, $PH = QH$, $\angle BPH \equiv \angle CQH$ $\Rightarrow$ $\Delta\ PHQ$, $\Delta\ BHC$ isoscele $\Rightarrow$ patrulaterul *BCQP* inscriptibil $\Rightarrow$ $\angle QPH \equiv \angle HBT$, $\angle PQH \equiv \angle HCT$, $\angle HBT \equiv \angle HCT$ $\Rightarrow$ $\angle QPH \equiv \angle HCT$ (alt. int.) şi $\angle PQH \equiv \angle HBT$ (alt. int.) $\Rightarrow$ $PQ \parallel BC$.



$T \in BC$, $BT = TC$

b) Dacă $PQ \| BC$ trebuie arătat că Δ ABC.

În triunghiurile dreptunghice BB_1C, BCC_1 C_1T, B_1T mediane duse din vârfurile unghiurilor drepte deci $C_1T = B_1T = BC/2$, deci $\angle TC_1B_1 \equiv \angle TB_1C_1$ **[1]**.

NM linie mijlocie deci $NM \| BC$ şi $NM = BC/2$; deci $C_1T = B_1T = NM$ **[2]**

NT şi MT linii mijlocii deci $NT \| AC$ şi $NT = AC/2$, respectiv $MT \| AB$ şi $MT = AB/2$ **[3]**

Din relaţiile **[2]** şi **[3]** rezultă că patrulaterele NC_1MT, MB_1NT sunt trapeze isoscele deci $C_1M = NT$, respectiv $B_1N = MT$.

În trapezul isoscel NC_1MT $\angle NTM \equiv \angle TMC_1 \equiv \angle TNB_1 \equiv \angle TC_1B_1 \equiv \angle A$ **[4]**

În trapezul isoscel MB_1NT $\angle NTM \equiv \angle TNB_1 \equiv \angle TMC_1 \equiv \angle TB_1N \equiv \angle A$ **[5]**

Din **[1]**, **[4]** şi **[5]** rezultă că $\angle MC_1B_1 \equiv \angle NB_1C_1$ **[6]**

În triunghiurile dreptunghice BB_1A, ACC_1 B_1N, C_1M mediane duse din vârfurile unghiurilor drepte deci triunghiurile BB_1N, MCC_1 sunt isoscele şi atunci $\angle NBB_1 \equiv$

$\angle NB_1B$ respectiv $\angle MCC_1 \equiv \angle MC_1C$.

$\angle C_1NT \equiv \angle NC_1M$, $\angle B_1MT \equiv \angle MB_1N$ (unghiuri alăturate unei baze în trapeze isoscele) **[7]**

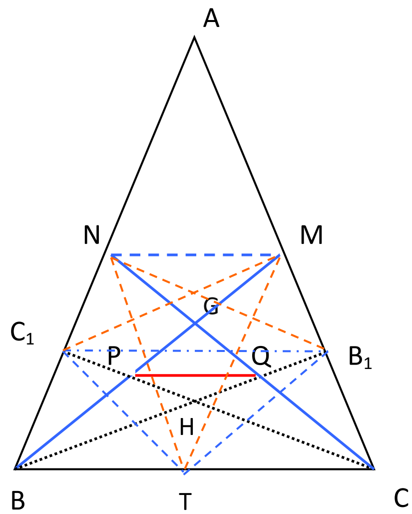
$\angle C_1NT \equiv \angle B_1MT$ (unghiuri opuse în paralelogram) **[8]**

Din **[7]** şi **[8]** rezultă $\angle NC_1M \equiv \angle MB_1N$ deci patrulaterul NMB_1C_1 este inscriptibil;

atunci $\angle B_1NM \equiv \angle B_1C_1M \equiv \angle B_1TM$, respectiv $\angle NMC_1 \equiv \angle NB_1C_1 \equiv \angle C_1TN$ **[9]**

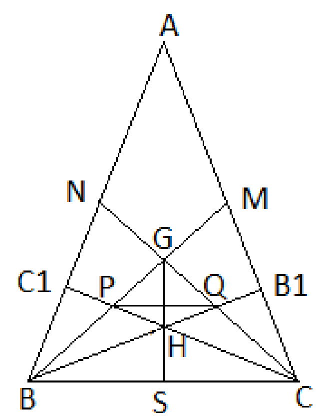
Din **[6]** şi **[9]** rezultă că patrulaterul NMB_1C_1 este trapez isoscel deci $B_1C_1 \| MN \| PQ \| BC$ *şi* $\angle B_1MN \equiv \angle C_1MN$, $\angle B_1MN \equiv \angle ACB$, $\angle C_1MN \equiv \angle ABC$. Din ultimele trei congruenţe rezultă că Δ ABC este isoscel.

În concluzie, din a) şi b) rezultă că figura pentru *ABC este isoscel* $\Leftrightarrow PQ \| BC$ este următoarea:



2) Prof. Silvia Muşătoiu, Bucureşti

Mai întâi trebuie menţionat în enunţul problemei că triunghiul ABC este isoscel de vârf A dacă şi numai dacă PQ este paralelă cu BC. În acest caz:



”⇒” Fie triunghiul ABC, isoscel de varf A şi S mijlocul laturii BC.

În aceste ipoteze, G-centrul de greutate al triunghiului, H-ortocentrul triunghiului şi S sunt coliniare. Pe de altă parte, cevienele GS, CP si BQ sunt concurente în H, deci conform teoremei lui Ceva, avem:

$$\frac{GP}{PB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QG} = 1$$

Cum BS=SC, rezultă $\frac{GP}{PB} = \frac{QG}{CQ}$, deci, conform reciprocei teoremei lui Thales, PQ||BC.

”⇐” Cum PQ||BC, conform teoremei lui Thales, avem $\frac{GP}{PB} = \frac{QG}{CQ}$ (1)

Contruim punctul S, astfel încât GH∩BC={S}. Aplicând teorema lui ceva, gasim

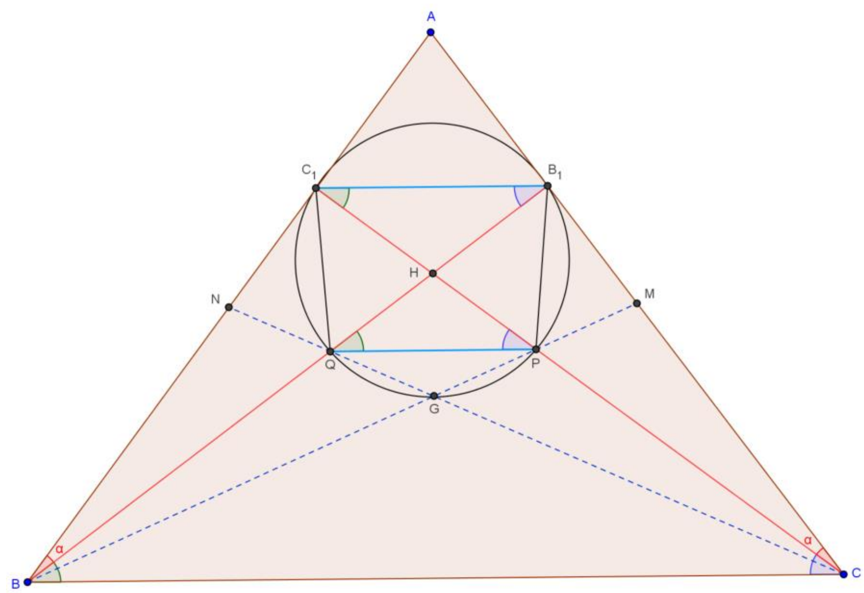
$$\frac{GP}{PB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QG} = 1$$

Si folosind (1), obtinem BS=CS, deci S este mijlocul lui BC. Rezultă că în triunghiul ABC, ortocentrul H al triunghiului apartine medianei AS, de unde rezulta ca AS este si mediana si inaltime, adica triunghiul este isoscel de varf A.

3) Profesor Biro Istvan, Sânnicolau Mare

$(\Rightarrow)$ Dacă triunghiul ABC este isoscel atunci *BM=BN* şi *A*, *H*, *G* sunt coliniare (se află pe mediatoarea din A), de unde avem: *BG=CG*, *BH=CH* $\Rightarrow BQG_{\Delta} \equiv CPG_{\Delta} \Rightarrow GP = GQ$, deci $\frac{GP}{GM} = \frac{GQ}{GN} (GM = GN = \frac{1}{3}BM)$, ceea ce conform teoremei reciproce al lui Thales rezultă că

$PQ \parallel MN \parallel BC$.



$(\Leftarrow)$ Dacă $PQ \parallel BC$ şi având în vedere că patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil rezultă că şi patrulaterul QPB_1C_1 va fi inscriptibil; în plus observăm că AC_1 şi AB_1 sunt tangente din punctul A la cercul circumscris patrulaterului QPB_1C_1, deci sunt egale şi din $\sin\alpha = \frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}$ rezultă că AB=AC, adică triunghiul ABC este isoscel.

4) Prof.Olah Csaba, Harghita

REZOLVARE: "$\Rightarrow$": ABC_{Δ} este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$)

$$\left.\begin{array}{l} MBC_{\Delta} \equiv NCB_{\Delta} \\ B_1BC_{\Delta} \equiv C_1CB_{\Delta} \end{array}\right\} \overset{U.L.U.}{\Rightarrow} PBC_{\Delta} \equiv QBC_{\Delta} \Rightarrow [PB] \equiv [QC], \text{ dar } [GB] \equiv [GC] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{GP}{GB} = \frac{GQ}{GC} \Rightarrow PQ \| BC \text{ (dupa teorema reciproca a lui } \textit{Thales}\text{).}$$

"$\Leftarrow$": $PQ \| BC$ - atunci dupa teorema lui *Thales* in triunghiul GBC_{Δ} : $\frac{GP}{PB} = \frac{GQ}{QC}$ (*)

Fie $\{G_1\} = pr_{AB}G$, $\{G_2\} = pr_{AC}G \Rightarrow GG_1 \| PC_1$ si $GG_2 \| PB_1 \Rightarrow$ in triunghiurile BGN_{Δ} si CGM_{Δ} putem scrie: $\frac{GP}{PB} = \frac{G_1C_1}{C_1B}$ si $\frac{GQ}{QC} = \frac{G_2B_1}{B_1C} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{G_1C_1}{C_1B} = \frac{G_2B_1}{B_1C}$ - de aici rezulta (dupa teorema reciproca a lui *Thales*) ca $B_1C_1 \| BC$, adica BCB_1C_1 este trapez. Daca am demonstra ca BCB_1C_1 este un trapez isoscel acesta ar rezulta ca ABC_{Δ} este isoscel (unghiurile B si C sunt congruente)

Cum $m(BC_1C) = m(CB_1B) = 90^{\circ} \Rightarrow$ unghiurile BC_1C si CB_1B pot fi inscrise in semicercul cu diametrul $[BC] \Rightarrow B, C, B_1, C_1$ sunt conciclice, adica trapezul BCB_1C_1 este isoscel. q.e.d.

5) Prof. Constantin Telteu, Constanţa

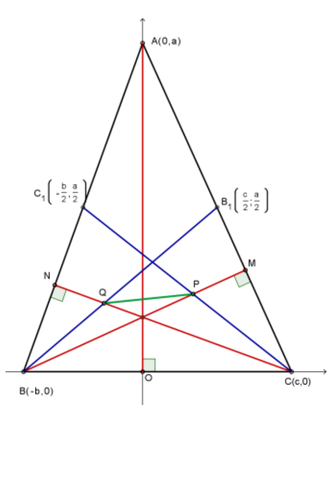
Soluţie analitică:

Considerăm un sistem cartezian de axe, astfel ca vârfurile triunghiului să fie: $A(0,a)$; $B(-b,0)$; $C(c,0)$, cu $a,b,c \in (0,+\infty)$. Obţinem:

$$m_{AC} = -\frac{a}{c};\ m_{h_B} = \frac{c}{a};\ BM : y = \frac{c}{a}(x+b);$$

$$m_{AB} = \frac{a}{b};\ m_{h_C} = -\frac{b}{a};\ CN:\ y = -\frac{b}{a}(x-c);$$

$$B_1\left(\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right);\ C_1\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right);\ CC_1:\ y = -\frac{a}{2c+b}(x-c);\ BB_1:\ y = \frac{a}{2b+c}(x+b).$$



P fiind intersecţia înălţimii din B cu mediana din C, coordonatele lui se obţin rezolvând sistemul format de ecuaţiile lor:

$\begin{cases} y=\dfrac{c}{a}(x+b) \\ y=-\dfrac{a}{2c+b}(x-c) \end{cases}$. Se obţine $x_P=\dfrac{c\left(a^2-2bc-b^2\right)}{2c^2+bc+a^2}$; $y_P=\dfrac{ac(c+b)}{2c^2+bc+a^2}$.

Q fiind intersecţia înălţimii din C cu mediana din B, coordonatele lui se obţin rezolvând sistemul format de ecuaţiile lor:

$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{a}(x-c) \\ y=\dfrac{a}{c+2b}(x+b) \end{cases}$. Se obţine: $x_Q=\dfrac{b\left(c^2+2bc-a^2\right)}{bc+2b^2+a^2}$; $y_Q=\dfrac{ab(b+c)}{bc+2b^2+a^2}$.

"$\Rightarrow$" Dacă triunghiul dat este isoscel: $b=c \Rightarrow y_P=y_Q=\dfrac{2ab^2}{3b^2+a^2} \Rightarrow PQ \parallel BC.$

"$\Leftarrow$" Dacă $PQ \parallel BC$, atunci:

$y_P=y_Q \Leftrightarrow \dfrac{ac(c+b)}{2c^2+bc+a^2}=\dfrac{ab(b+c)}{bc+2b^2+a^2} \Leftrightarrow (b+c)(b-c)\left(bc+a^2\right)=0 \Leftrightarrow b=c$, deci triunghiul dat este isoscel.

Bililiografie: Problema saptămanii 30.08.2010 - 5.09.2010, www.mateinfo.ro

4 . CONCURS - PROBLEMA LUNII DECEMBRIE 2015

Fie pătratul ABCD de latură “a”, cercul de centru O înscris în acest pătrat și punctul M mobil pe cercul (O). Să se arate că suma $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ este constantă.

Problemă propusă spre rezolvare de prof. Andrei Octavian Dobre

Așteptăm soluțiile problemei pe revista@mateinfo.ro , soluții care vor apărea în numărul din luna Ianuarie al Revistei Electronice MateInfo.ro ISSN 2065-6432.

Concursul este adresat atât profesorilor, cât și elevilor pasionați de matematică.

De asemenea așteptăm și alte articole sau propuneri de probleme pe adresa de e-mail a revistei.