



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a V – a

SUBIECTUL I (7 p)

Determinați numărul natural n de patru cifre care are proprietatea că, dacă îi eliminăm cifra sutelor, din numărul rezultat scădem 2, apoi diferența obținută o înmulțim cu 19 și noul rezultat îl împărțim la 2, obținem n .

Gazeta Matematică 5/2014

SUBIECTUL II (7 p)

Se dau numerele :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n \text{ și}$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n - 1) + n, \text{ unde } n \text{ este un număr natural impar.}$$

- a) Să se determine numărul n știind că $S_1 = 2015 \cdot S_2$;
- b) Care este cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit $S_1 + S_2$, astfel încât să se obțină un pătrat perfect ;
- c) Aflați numerele naturale n și m , cu n impar, astfel încât $S_1 - S_2 = 2^m$.

SUBIECTUL III (7 p)

Determinați numerele naturale a, b, c știind că :

$$3a + 2b + c = 598 ; a + 2b + 3c = 602 \text{ și } a < b < c .$$

SUBIECTUL IV (7 p)

a) Demonstrați că $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22}$

b) Aflați care dintre numerele $a = 2^{23} \cdot 5^{35}$ și $b = 3^{22} \cdot 7^{24}$ este mai mare .

Notă : Timp de lucru : 2 ore .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, februarie 2015

BAREM DE CORECTARE

Clasa a V- a

SUBIECTUL I (7 p)

Determinați numărul natural n de patru cifre care are proprietatea că, dacă îi eliminăm cifra sutelor, din numărul rezultat scădem 2, apoi diferența obținută o înmulțim cu 19 și noul rezultat îl împărțim la 2, obținem n .

Soluție :

$$n = \overline{abcd} ; \overline{abcd} = [(\overline{acd} - 2) \cdot 19] : 2 \Rightarrow 2 \cdot \overline{abcd} = (\overline{acd} - 2) \cdot 19 \dots\dots\dots 1p$$

$$2(1000a + 100b + \overline{cd}) = 19(100a + \overline{cd} - 2) \Rightarrow$$

$$100(a + 2b) = 17 \cdot \overline{cd} - 38 \dots\dots\dots 2p$$

$$\mathcal{U}(17 \cdot \overline{cd} - 38) = 0 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow 10(a + 2b) = 17c + 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$\mathcal{U}(17c + 3) = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a + 2b = 2$$

$$a = 2, b = 0, n = 2014 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL II (7 p)

Se dau numerele :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n \text{ și}$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n - 1) + n, \text{ unde } n \text{ este un număr natural impar.}$$

a) Să se determine numărul n știind că $S_1 = 2015 \cdot S_2$;

b) Care este cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit $S_1 + S_2$, astfel încât să se obțină un pătrat perfect ;

c) Aflați numerele naturale n și m , cu n impar, astfel încât $S_1 - S_2 = 2^m$.

Soluție :

a) $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, S_1 = (2k + 1)(k + 1), S_2 = k + 1$

$(2k + 1)(k + 1) = 2015(k + 1) \Rightarrow n = 2015$ 2p

b) $S_1 + S_2 = 2(k + 1)^2$. Numărul căutat este 22p

c) $S_1 - S_2 = 2k(k + 1), k \in \mathbb{N}$ 1p

$k(k + 1) = 2^{m-1}, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$

$k = 1, m = 2$ (justificare) $\Rightarrow n = 3$ 2p

SUBIECTUL III (7 p)

Determinați numerele naturale a, b, c știind că :

$3a + 2b + c = 598; a + 2b + 3c = 602$ și $a < b < c$.

Soluție :

$(a + 2b + 3c) - (3a + 2b + c) = 4 \Rightarrow c - a = 2 \Rightarrow c = a + 2$ 2p

$3a + 2b + a + 2 = 598 \Rightarrow 2a + b = 298 \Rightarrow b = 298 - 2a$ 2p

$a < b < c \Rightarrow a < 298 - 2a < a + 2 \Rightarrow a = 99$ 2p

$b = 100, c = 101$ 1p

SUBIECTUL IV (7 p)

a) Demonstrați că $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22}$

b) Aflați care dintre numerele $a = 2^{23} \cdot 5^{35}$ și $b = 3^{22} \cdot 7^{24}$ este mai mare .

Soluție :

a) $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22} \Leftrightarrow 441^{11} < (5^3 \cdot 2^2)^{11} \Leftrightarrow 441^{11} < 500^{11}$ 2p

b) $a = 2^{22} \cdot 2 \cdot 5^{33} \cdot 5^2 = 2^{22} \cdot 5^{33} \cdot 50$ 2p

$b = 3^{22} \cdot 7^{22} \cdot 7^2 = 21^{22} \cdot 49$ 2p

$2^{22} \cdot 5^{33} > 21^{22}, 50 > 49 \Rightarrow a > b$ 1p