

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Fie şirul de numere naturale $1, 4, 7, \dots, 2014, \dots$

- (a) Să se cerceteze dacă numerele 826 şi 2466 sunt termeni ai şirului.
- (b) Să se determine numerele de trei cifre din şir care se măresc de şase ori dacă li se adaugă o cifră în faţă.

Aurel Aldea

2. (a) Determinaţi numărul natural n pentru care $401 \cdot 401^3 \cdot 401^5 \cdot \dots \cdot 401^{401} = 401^{n^2}$.

(b) Pentru n determinat la punctul (a), aflaţi restul împărţirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 - 31$ la n .

(c) Pentru n determinat la punctul (a), arătaţi că n^{2015} se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte.

Dorina Bocu

3. Aflaţi numerele naturale nenule $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care suma $S = 2^n + 4^n + 6^n + \dots + 1888^n$ nu este divizibilă cu 10.

Sorina Stoian

4. Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel: $\{1\}$, $\{3, 5\}$, $\{7, 9, 11\}$, $\{13, 15, 17, 19\}$,

(a) Aflaţi care este primul număr din cea de a 2014-a submulţime.

(b) Există o submulţime de acest tip care începe cu 2013? Justificaţi răspunsul.

Gazeta Matematică 10/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Fie a şi b numere naturale nenule.

- (a) Dacă $7|(2a + 5b)$, arătaţi că $7|(5a + 2b)$.
- (b) Dacă $7|(5a + 2b)$, iar $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2012}$, arătaţi că b se divide prin 7.
- (c) Aflaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $5a + 2b$ este egal cu cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 7 şi 5.

Dorina Bocu

2. (a) Să se scrie numărul natural 12 ca diferenţă de pătrate perfecte de numere naturale.
- (b) Să se arate că numărul $A = 24 \cdot 2^{2n-1} + 12 \cdot 2^{2n+2} + 6 \cdot 2^{2n-3}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ se poate scrie ca suma a două diferenţe de pătrate perfecte de numere naturale.

Emanuel Munteanu

3. Un râu curge în linie dreaptă, trecând prin localităţile $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2014}, A_{2015}$, astfel încât $A_1A_3 = 2A_1A_2$, $A_1A_4 = 2A_1A_3$, $A_1A_5 = 2A_1A_4$, ..., $A_1A_{2015} = 2A_1A_{2014}$. Un drum drept, ce trece peste podul din oraşul A_{2014} , leagă două oraşe B şi C , situate de o parte şi de alta a râului, egal depărtate de pod.
- (a) Dacă distanţa dintre localităţile A_1 şi A_2 este de 2 km, aflaţi distanţa dintre A_4 şi A_8 .
 - (b) Comparaţi distanţa dintre B şi A_1 cu distanţa dintre C şi A_{2015} .

Dorina Rapcea

4. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2013}$ numere naturale nenule. Arătaţi că numărul

$$A = 2014^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2013}+a_1)-6}$$

are cel puţin trei divizori diferiţi de 1.

Gazeta Matematică 6-7-8/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a VII-a

1. În triunghiul ABC dreptunghic în A , avem M mijlocul laturii (BC) , E mijlocul lui (AM) , iar $m\hat{B} < m\hat{C}$. Fie $MB \perp BE$, $F \in (BE)$, $MS \perp AB$, $S \in (AB)$. Arătați că
- (a) $AB < \frac{3}{2}BE$,
(b) $4MF < 3MS$.

Camelia Postolache

2. Se dau numerele:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2015} \\ b &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2014} \right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2014} \right) + \dots + \left(\frac{2013}{2013} + \frac{2013}{2014} \right) + \left(\frac{2014}{2014} \right). \end{aligned}$$

Stabiliți care dintre numerele $\sqrt{a-1}$, \sqrt{b} , $\sqrt{2ab}$ este rațional, justificând răspunsul.

Dorina Rapcea

3. În triunghiul ABC ($AB < AC$), bisectoarea interioară a unghiului A intersectează latura BC în punctul D și paralela prin C la AB în punctul E , iar mediana corespunzătoare laturii BC intersectează aceeași paralelă în punctul N . Fie M simetricul lui A față de B , O mijlocul lui $[BC]$ și $\{P\} = MO \cap BN$. Aflați valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{APM}}{\mathcal{A}_{BME}}$.

Sorina Stoian

4. (a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$.
(b) Demonstrați că pentru orice număr real x avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+2014| \geq 1007^2.$$

Gazeta Matematică 11/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1. În tetraedrul $OABC$, $OA \perp OB \perp OC \perp OA$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, unde $a, b, c > 0$.
- (a) Demonstrați că înălțimea din O a tetraedrului are piciorul în ortocentrul H al triunghiului ABC .
- (b) Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 9 \cdot OH^2$, arătați că $OABC$ este piramidă triunghiulară regulată.

Dorina Bocu

2. (a) Arătați că pentru orice număr natural nenul n există un număr natural $a \geq n^2$ astfel încât $n\sqrt{a - n^2} = \frac{a}{2}$.

- (b) Găsiți 2015 numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ care verifică relația

$$\sqrt{a_1 - 1} + 2\sqrt{a_2 - 4} + \dots + 2015\sqrt{a_{2015} - 2015^2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}}{2}.$$

- (c) Arătați că nu există 2015 numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ care verifică relația

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1 - 1} - 2\sqrt{a_2 - 4} + 3\sqrt{a_3 - 9} + \dots - 2014\sqrt{a_{2014} - 2014^2} \\ & + 2015\sqrt{a_{2015} - 2015^2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}}{2}. \end{aligned}$$

Ioana Mașca

3. Determinați numerele naturale \overline{ab} cu proprietatea că $\left[\overline{a, b^3}\right] = \overline{ab}$. Am notat $[x]$ partea întreagă a lui x .

Gazeta Matematică 10/2014.

4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$ și $P, Q \in (VO)$. Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{E\} = BQ \cap DV$ și $\{T\} = DQ \cap BV$.

- (a) Arătați că $EF \parallel (ABC)$.

- (b) Aflați $m(\widehat{EF, ST})$.

- (c) Aflați $m(\widehat{(SOT), (EFB)})$.

Gazeta Matematică 11/2014,

enunț modificat, Dorina Rapcea, Ioana Ciocirlan.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.