

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	Din oficiu	1p																																			
a)	Dacă există triunghi cu laturile a, b, c atunci $a + b > c$. Însă $c \in N^*$ este cel mai mare număr natural cu această proprietate, deci $c = a + b - 1$, adică $a \circ b = a + b - 1$.	2p																																			
	Operația este asociativă, comutativă, elementul neutru este $e = 1 \in N^*$	2p																																			
	$a \circ a = a \circ a = 1$ implică $a + a - 1 = 1$, deci $a = 2 - a$. Însă $a \in N^*$, deci numai $a = 1$ este simetrizabil și simetricul coincide cu 1.	2p																																			
b)	Dacă există triunghi cu laturile a, b, c astfel încât c este cel mai mic număr natural cu această proprietate atunci $ a - b < c$, deci $c = a - b + 1$.	1p																																			
	Tabela operației: <table><tr><td>*</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	*	1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	2	2	1	2	3	4	3	3	2	1	2	3	4	4	3	2	1	2	5	5	4	3	2	1
*	1	2	3	4	5																																
1	1	2	3	4	5																																
2	2	1	2	3	4																																
3	3	2	1	2	3																																
4	4	3	2	1	2																																
5	5	4	3	2	1																																

2.)	Din oficiu	1p
a)	Din $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este strict crescătoare deci este injectivă	1p
	Cum funcția f este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ rezultă că este surjectivă	1p
	f fiind bijectivă admite inversa f^{-1} și avem $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0) = y_0$	1p
	Cum $f(0) = 1$ avem $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$	1p
b)	Fie $x, y \in G \Rightarrow x \neq x_0, y \neq x_0$ și presupunând că $x * y = x_0$ avem $x * y = x_0 \Rightarrow f^{-1}(2f(x) \cdot f(y)) = f^{-1}(0) \Rightarrow 2f(x) \cdot f(y) = 0$ de unde obținem $f(x) = 0$ sau $f(y) = 0$ de unde $x = x_0$ sau $y = x_0$ contradicție, deci $x * y \neq x_0 \Rightarrow x * y \in G$, adică mulțimea G este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} față de "*"	1p
	$\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z) = f^{-1}(4f(x)f(y)f(z)) \Rightarrow "*" \text{ asociativă}$	1p
	$\forall x, y \in G, x * y = y * x = f^{-1}(2f(x)f(y)) \Rightarrow "*" \text{ comutativă}$	1p
	$\exists e \in G$ astfel încât $x * e = x, \forall x \in G, e = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ element neutru	1p
	$\forall x \in G, \exists x' \in G$ astfel încât $x * x' = e, x' = f^{-1}\left(\frac{1}{4f(x)}\right)$ element simetric	1p
	Rezultă că $(G, *)$ este un grup abelian	

3.)	Din oficiu	1p
	Cum $\left(\arctg(x^2 - x + 1)\right)' = \frac{2x-1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ și $\left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2\right)' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ avem	2p
	$F(x) = \int (4x^3 - 6x^2 + 6x - 2) \arctg(x^2 - x + 1) dx =$ $= \int (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2)' \arctg(x^2 - x + 1) dx =$	1p
	$= (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) \arctg(x^2 - x + 1) - \int (2x - 1) dx =$	2p
	$= (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) \arctg(x^2 - x + 1) - x^2 + x + C$	2p
	Deoarece $A(1,0) \in G_F$, rezultă că $F(1) = 0$, adică $2 \cdot \frac{\pi}{4} + C = 0$, deci $C = -\frac{\pi}{2}$. Rezultă că $F(x) = (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2) \arctg(x^2 - x + 1) - x^2 + x - \frac{\pi}{2}$.	2p

4.)	Din oficiu	1p
	Cum F este o primitivă a funcției f rezultă că F este derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	Înmulțind cu e^{-x} relația $F(x) - f(x) = \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$ se obține $e^{-x} F(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (e^{-x} F(x))' = -e^{-x} \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde $e^{-x} F(x) = \int -e^{-x} \sin^2 x dx$	2p
	Utilizând metoda integrării prin părți obținem: $\int e^{-x} \sin^2 x dx = -e^{-x} \sin^2 x - \frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$	2p
	Avem $e^{-x} F(x) = e^{-x} \sin^2 x + \frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + C$ de unde se obține $F(x) = \sin^2 x + \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + C e^x$	2p
	Din $f(0) = 1$ se obține $F(0) = 1$ și $C = \frac{3}{5}$	1p
	Cum din ipoteză avem $f(x) = F(x) - \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$, obținem $f(x) = \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x + 3e^x), \forall x \in \mathbb{R}$	1p