

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**ETAPA LOCALĂ****28 februarie 2015****CLASA A X-A**

1.) a) Se calculeze $A(a, b, c) = \log_{\sqrt{c}} \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \log_{\frac{1}{c}} \frac{c}{a + b + 2\sqrt{ab}}$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $c > 1$

b) Să se rezolve ecuația $\left\{ \log_{\sqrt{3}} [9(\sqrt{2} - 1)] + \log_{\frac{1}{3}} [3(3 - 2\sqrt{2})] \right\}^{x^2 - 3x} = \frac{1}{9}$, $x \in \mathbb{R}$.

2.) Se dau numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1 - z_2| = |z_2| = |z_1| \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Să se calculeze $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ și $\frac{z_1}{z_2}$.

b) Să se determine numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E_n \in \mathbb{Z}$, unde $E_n = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n}$

3.) Pentru funcția f definită pe mulțimea numerelor naturale are loc relația

$$f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \dots + nf(n) = n^2 f(n), \text{ oricare ar fi } n \geq 1. \text{ Dacă } f(1) = 2015, \text{ să}$$

se determine valorile numărului natural n pentru care $f(n)$ este tot număr natural.

4.) a) Fie A și B imaginile soluțiilor ecuației $z^2 - 13z + 72 + 30i = 0$ în planul complex. Să se calculeze aria triunghiului AOB unde O este originea sistemului cartezian.

b) Să se reprezinte grafic în sistemul cartezian de la punctul a) mulțimea soluțiilor inecuației $|z| \leq 4$. Cât la sută din suprafața triunghiului AOB acoperă această mulțime a soluțiilor inecuației? Indicați valoarea procentului rotunjită la întreg.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore