

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015
BAREM
CLASA A IX-A

1.)	Din oficiu	1p
a)	$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$ adevărat pentru $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$	3p
b)	Din a) rezultă că $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$ În mod analog: $b^3 + c^3 + abc \geq bc(a+b+c)$, $c^3 + a^3 + abc \geq ca(a+b+c)$.	3p
	De unde avem $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq$ $\frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$.	3p
2.)	Din oficiu	1p
	Avem: $\frac{n^2 - n + 3}{(n-1)n} = \frac{n^2 - n}{(n-1)n} + 3 \frac{1}{(n-1)n} = 1 + 3 \frac{1}{(n-1)n} = 1 + 3 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$	3p
	De unde $y_n = n - 1 + 3 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = n - 1 + 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n + 2 - \frac{3}{n} = n + 1 + \frac{n-3}{n}$	4p
	Pentru $n \geq 4$ avem $\left[\frac{n-3}{n} \right] = 0$ de unde rezultă $[y_n] = n + 1$ și $\{y_n\} = y_n - [y_n] = \frac{n-3}{n}$	2p
3.)	Din oficiu	1p
	$AM \cap BN \cap CP = \{S\}$, conform teoremei lui Ceva $\frac{NA}{NC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{PB}{PA} = 1$.	2p
	Însă $\frac{MB}{MC} = 1$, rezultă că $\frac{NA}{NC} = \frac{PA}{PB}$ de unde obținem $PN \parallel BC$	2p
	$\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle CBN \Rightarrow BN$ bisectoare $\Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{BA}{BC} = \frac{2}{3}$. Din $\frac{NA}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{NA}{AC} = \frac{2}{5}$	
	Din $PN \parallel BC \Rightarrow APN_{\Delta} \sim ABC_{\Delta}$ de unde $\frac{PN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$	2p
	Din $PN \parallel BC \Rightarrow SNP_{\Delta} \sim SBC_{\Delta}$, deci $\frac{A_{SNP}}{A_{SBC}} = \left(\frac{PN}{BC} \right)^2 = \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25}$.	3p
4.)	Din oficiu	1p
	$a_2 = 3a_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} a_1$	2p
	$a_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} a_1$	2p
	Se demonstrează cu inducție că $a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1$ de unde rezultă că $b_n = \frac{n+1}{2} a_1$	4p
	Cum $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} a_1$ rezultă că $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu rația $\frac{1}{2} a_1$	1p