

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Calculați: $\int \arcsin(\sin x) dx$, dacă $x \in [0, 2\pi]$

2. Se consideră mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ și

$$F = \left\{ f : A \rightarrow A, f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

a) Demonstrați că (F, \circ) este un grup, unde " \circ " este operația de compunere a funcțiilor.

b) Pentru funcția $f : A \rightarrow A, f(z) = \frac{z-1}{2z-1}$ determinați $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

3.a) Arătați că dacă o funcție continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este injectivă, atunci este monotonă.

b) Arătați că nu există funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să admită o primitivă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(F(x)) = -x^{2015}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. În grupul (G, \cdot) este adevărată implicația:

$$\text{Dacă } xy^{2015} = z^{2015}x, \text{ atunci } y = z.$$

a) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.

b) Dați exemplu de grup cu cel puțin 2015 elemente cu proprietatea din enunț.

Matematika tantárgyverseny – XII. osztály
Területi szakasz – 2015. február 15.

1. Számítsd ki: $\int \arcsin(\sin x) dx$, ha $x \in [0, 2\pi]$

2. Adott az $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ és az

$$F = \left\{ f : A \rightarrow A, f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \text{ halmaz.}$$

a) Igazold, hogy az (F, \circ) egy csoport, ahol a " \circ " a függvények összetevési művelete.

b) Határozd meg az $f : A \rightarrow A, f(z) = \frac{z-1}{2z-1}$ függvény esetén az $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$ -et.

3. a) Igazold, hogy ha egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény injektív, akkor monoton.

b) Igazold, hogy nem létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitiválható függvénye, amelynek valamely $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye teljesíti az $f(F(x)) = -x^{2015}$ összefüggést, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

4. A (G, \cdot) csoportban érvényes a következő implikáció:

$$\text{Ha } xy^{2015} = z^{2015}x, \text{ akkor } y = z.$$

a) Igazold, hogy (G, \cdot) kommutatív csoport!

b) Adj példát legalább 2015 elemű csoportra, amelyben teljesül az implikáció.