

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

**Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a**

Subiectul I

Calculați numărul și arătați că este rațional:

$$A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$$

Subiectul II

Arătați că :

- a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$; oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$
b) $\frac{2013}{1 \cdot 2} + \frac{2012}{2 \cdot 3} + \frac{2011}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$

Subiectul III

În triunghiul ABC , AM este mediană , iar MD și ME sunt bisectoarele unghiurilor AMB respectiv AMC ($D \in AB$, $E \in AC$). Notăm cu N , respectiv P proiecțiile punctelor D și E pe AM . Arătați că DP și EN sunt paralele.

(G. M. nr 6-7-8, 2013)

Subiectul IV

Fie punctele A,B,C,D astfel încât $AB \parallel CD$ și $CD = \frac{AB}{2}$. Fie $AD \cap BC = \{E\}$

și două puncte diferite F și G simetrice față de C, unde $F, G \notin BC$. Arătați că dreptele EG și BF sunt:

- a) paralele dacă A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC;
b) concurente în mijlocul segmentului [BF], dacă A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

Constantin Bozdog, Reghin

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.



S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică

Faza locală 13.02.2015

Clasa a VII-a

Bareme de corectare

Subiectul I

Calculați numărul și arătați că este rațional:

$$A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$$

Soluție:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$

...

$$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}} = \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{4096575}} - \frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}} \dots\dots\dots (3p)$$

$$\text{Prin însumare se obține } A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} \dots\dots\dots (3p)$$

$$\text{Finalizare } A = \frac{44}{45} \in Q \dots\dots\dots (1p)$$

Subiectul II

Arătați că :

$$a) \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ aricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) \frac{2013}{1 \cdot 2} + \frac{2012}{2 \cdot 3} + \frac{2011}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$$

Soluție:

$$a) \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-n^2+1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ deci propoziția este adevărată } \dots\dots\dots (3p)$$

b) se aplică relația pentru fiecare fracție

$$\frac{2013}{1 \cdot 2} = 2013 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)$$



$$\frac{2012}{2 \cdot 3} = 2012 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{2011}{3 \cdot 4} = 2011 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

...

$$\frac{1}{2013 \cdot 2014} = \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \right) \dots\dots\dots (2p)$$

Adunăm relațiile și obținem

$$S = 2013 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \dots - \frac{1}{2014} = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + \dots + 1 - \frac{1}{2014} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014} \dots\dots\dots (2p)$$

Subiectul III

În triunghiul ABC, AM este mediană, iar MD și ME sunt bisectoarele unghiurilor AMB respectiv AMC ($D \in AB$, $E \in AC$). Notăm cu N, respectiv P proiecțiile punctelor D și E pe AM. Arătați că DP și EN sunt paralele.

(gazeta matematica nr 6-7-8, 2013)

Soluție:

În triunghiurile ABM și AMC scriem teorema bisectoarei pentru bisectoarele MD respectiv ME și obținem:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BD}{DA} \text{ respectiv } \frac{CM}{MA} = \frac{CE}{EA} \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

AM mediana deci $MB=MC$, și înlocuim și aplicăm Reciproca Thales și deducem că DE și BC sunt paralele. 1p

Notăm cu O intersecția dintre AM și DE.

$$\text{Obținem că triunghiurile ADO și ABM sunt asemenea și deci } \frac{AD}{AB} = \frac{AO}{AM} = \frac{DO}{BM} \quad (2)$$

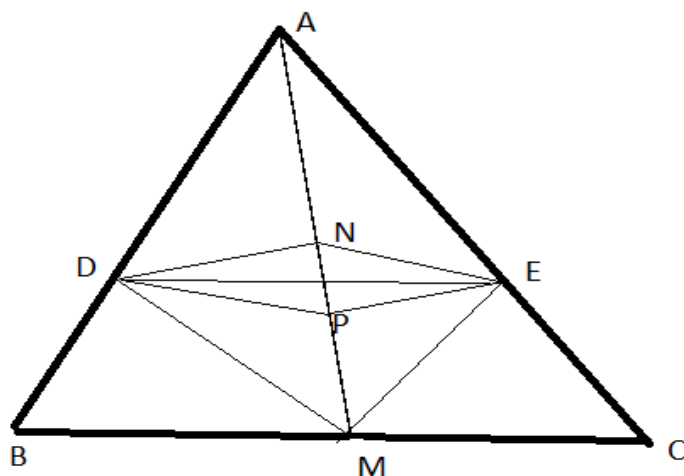
iar triunghiurile AOE și AMC sunt asemenea și deci

$$\frac{AO}{AM} = \frac{AE}{AC} = \frac{OE}{MC} \quad (3)$$

Din relațiile 1, 2, 3 deducem că $DO=OE$ 2p

Din congruența triunghiurilor dreptunghice OPE și OND (cazul IU) avem că OP și ON sunt congruente. 1p

În patrulaterul DPEN avem $DO=OE$ și $OP=ON$ deci DPEN este paralelogram de unde concluzia 1p.



Fie punctele A,B,C,D astfel incat $AB \parallel CD$ si $CD = \frac{AB}{2}$. Fie $AD \cap BC = \{E\}$ si doua

- paralele dacă A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC;
- concurente în mijlocul segmentului [BF], dacă A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

Soluție:

Teorema fundamentală a asemanarii in $\triangle ABE$ ($CD \parallel AB$): $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

$$\Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$$

.....2p

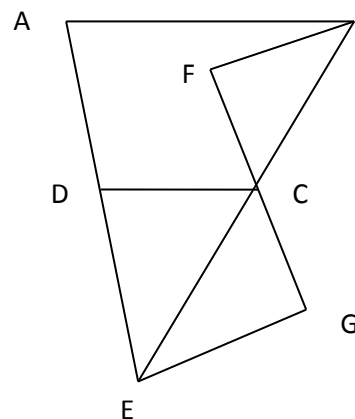


a) A și D de aceeași parte a dreptei BC

$$\frac{CE}{BE} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = CE$$

Dar $CF = CG$, deci BFEG paralelogram

$$\Rightarrow BF \parallel EG \dots\dots\dots 2p$$

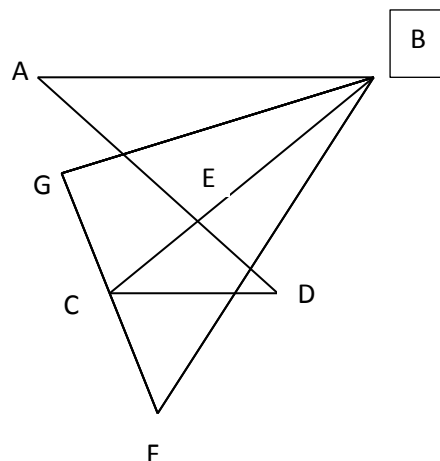


b) A și D de o parte și de alta a dreptei BC

$$\frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$$

$CF = CG$, deci E este centru de greutate în $\triangle BFG$2p

$\Rightarrow GE$ mediană $\Rightarrow GE$ conține mijlocul segmentului $[BF]$1p



Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem