

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a IX-a, specializarea Științe ale naturii

PROBLEMA 1

a) Fie predicatele, $p(x) : |x - 2| + |1 - x| = 1$, $x \in R$, $q(x) : \left\lfloor \frac{2x - 1}{2} \right\rfloor = 1$, $x \in R$, și A, B mulțimile de adevăr ale celor două predicate. Determinați $A \cap B$.

b) Fie $A = \{p \in N, p < 30, p \text{ număr prim}\}$ și $B = \{r \in Q, r = \frac{a}{b}, a, b \in A\}$.

Determinați card B .

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

a) $|x - 2| + |1 - x| = 1 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$ 2p

$\left\lfloor \frac{2x - 1}{2} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)$ 1p

$A \cap B = \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$ 1p

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \Rightarrow \text{card } A = 10$ 1p

Din $a \in A$ și $b \in B \Rightarrow \text{card } B = 10 \cdot 10 = 100$ 2p

PROBLEMA 2

Să se calculeze suma $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}}$

Propus de Prof. Gavriș Alina, Lic. Tehnologic “Ioachim Pop”, Ileanda

Rezolvare:

$S = 1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + \dots + (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})$ 2p

$S = \frac{10 - 1}{10 - 1} + \frac{10^2 - 1}{10 - 1} + \frac{10^3 - 1}{10 - 1} + \dots + \frac{10^n - 1}{10 - 1}$ 2p

$$S = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n) = \frac{1}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] \quad 2p$$

$$S = \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{2}. \quad 1p$$

PROBLEMA 3

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \geq 1$ și $b_n = \frac{3 - a_n}{a_n - 1}$, pentru orice $n \geq 1$.

- Determinați termenii a_2, a_3, a_4 .
- Utilizând metoda inducției matematice, arătați că $a_n = \frac{n+1}{n}$, $\forall n \geq 1$.
- Arătați că șirul (b_n) este progresie aritmetică.

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

a) Pentru $n = 1, n = 2, n = 3$, obținem $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$ **3p**

b) Parcurge etapa verificării: $p(1)$ adevărată **1p**

Demonstrează implicația $p(k) \rightarrow p(k+1)$ **1p**

c) Calculul $b_n = \frac{3 - a_n}{a_n - 1} = \frac{3 - \frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n} - 1} = 2n - 1$ **1p**

Finalizare $b_{n+1} - b_n = 2$, deci șirul este o progresie aritmetică **1p**

PROBLEMA 4

Se dă patrulaterul convex $ABCD$, în care E și F sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Arătați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$.

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

Desen 1p

Din formula vectorului median avem:

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{EF} \quad (1) \quad \text{2p}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \quad (2) \quad \text{1p}$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \quad (3) \quad \text{1p}$$

Adunăm (2) cu (3) și avem $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \stackrel{(1)}{=} 2\overrightarrow{EF}$ 1p

Deci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$ 1p

*Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.
Timpul de lucru este de 3 ore.*