

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a X-a, specializarea Științe ale naturii

PROBLEMA 1

Calculați $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$.

Propus de prof. Driha Ioan, Lic. Tehnologic “Voievodul Gelu”, Zalău

Soluție:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} \quad 3 \text{ p}$$

$$\text{Înlocuim } \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Calculăm radicalul și obținem } 2 - \sqrt{5} \quad 3 \text{ p}$$

PROBLEMA 2

a) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $8^{\log_2 \sqrt[6]{10}} < n$.

Selectată de prof. Turdean Katalin din G.M. 12

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$.

Rezolvare:

$$\text{a) Inegalitatea se scrie: } \sqrt[6]{10}^{\log_2 8} < n \Leftrightarrow \quad 1 \text{ p}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{10}^3 < n \Leftrightarrow \sqrt{10} < n \quad 1 \text{ p}$$

Deci cel mai mic număr natural n este 4. 1 p

b) Dacă notăm $2^x = a, 3^x = b, 7^x = c$, ecuația devine $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ 1 p

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \quad 1p$$

$$\Leftrightarrow a = b = c. \text{ Deci } 2^x = 3^x = 7^x. \quad 1p$$

$$\text{Se obține soluția ecuației } x = 0 \quad 1p$$

PROBLEMA 3

Să se rezolve ecuația în \mathbb{C} : $z^2 - 4|z| + 3 = 0$.

(Manual de clasa a X-a, autor Mircea Ganga)

Rezolvare

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad 1p$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad 1p$$

$$a^2 - b^2 - 4\sqrt{a^2 + b^2} + 3 + 2abi = 0 \quad 1p$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 4\sqrt{a^2 + b^2} + 3 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \quad 1p$$

$$\text{Rezolvare sistem de ecuații : } (0, -2 + \sqrt{7}), (0, 2 - \sqrt{7}), (3, 0), (-3, 0), (1, 0), (-1, 0) \quad 2p$$

$$\text{Finalizare: } z_1 = (-2 + \sqrt{7})i, z_2 = (2 - \sqrt{7})i, z_3 = 3, z_4 = -3, z_5 = 1, z_6 = -1 \quad 1p$$

PROBLEMA 4

Se consideră $E = \lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \dots + \lg \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care expresia E este : a) echiunitară, b) subunitară.

Propus de prof. Pah Florina, Lic. Teoretic "Ion Agârbiceanu", Jibou

Rezolvare:

$$E = \lg \frac{n+1}{2} \quad 2p$$

$$\text{a) } \frac{n+1}{2} = 10 \quad 1p$$

$$n = 19 \quad 1p$$

$$b) \lg \frac{n+1}{2} < 1 \quad 1p$$

$$\frac{n+1}{2} < 10 \quad 1p$$

$$n \in \{1, 2, \dots, 19\} \quad 1p$$

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timpul de lucru este de 3 ore.