

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ
**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem, Clasa a XII-a, specializarea Științe ale naturii

PROBLEMA 1

Fie $G = (3, +\infty)$, $x * y = xy - 3(x + y) + 12$. Să se arate că:

- a) $(G, *)$ este grup comutativ;
- b) Să se calculeze: $E = (-15) * (-13) * \dots * (-1) * 1 * \dots * 15$.

(Subiect propus de către Liceul Teoretic “Ion Agârbiceanu” Jibou)

Soluție:

a) asociativitatea și comutativitatea rezultă prin calcul direct2 puncte

elementul neutru este $e=4$ 1 punct

toate elementele sunt simetrizabile $x' = \frac{3x-8}{x-3} = 3 - \frac{1}{x-3} \in G$ 2 puncte

b) Căutăm un element α cu proprietatea $x * \alpha = \alpha, (\forall) x \in G \Rightarrow x \cdot \alpha - 3x - 3\alpha + 12 = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$
 $\Rightarrow E = 3$ 2 puncte

PROBLEMA 2

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se definește pe \mathbb{R} legea de compoziție "*" prin $x * y = axy + bx + by + c$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Determinați b și c în funcție de a , astfel încât -2 să fie elementul neutru al legii de compoziție considerate.
- b) Cu b și c astfel determinați, arătați că legea "*" este asociativă. Aflați apoi a știind că simetricul lui -4 este -4 .
- c) Pentru a, b și c determinați anterior, calculați $1 * 2 * 3 * \dots * n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(Selectată de prof. Turdean Katalin, C.N.S. Zalău)

a) $x * (-2) = (-2) * x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-2a + b)x + (-2b + c) = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\Rightarrow b = 2a + 1, c = 4a + 2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) Demonstrarea asociativității. $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Din $(-4) * (-4) = (-2) \Rightarrow a = 1, b = 3, c = 6 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

c) Întrucât $a = 1, b = 3, c = 6$, rezultă că $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ținând seama de acest rezultat avem:

$1 * 2 = 4 \cdot 5 - 3 = \frac{5!}{3!} - 3$ și $1 * 2 * 3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 - 3 = \frac{6!}{3!} - 3 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Se demonstrează prin inducție matematică

$1 * 2 * 3 * \dots * n = \frac{(n+3)!}{3!} - 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots\dots\dots 2 \text{ punct}$

PROBLEMA 3

Calculați următoarele integrale :

a) $\int \frac{2 - \sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 2} dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x-1}{x^2} dx$

(Subiect propus de către Liceul Teoretic "Ion Agârbiceanu" Jibou)

Soluție

a) $\int \frac{2 - \sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 2} dx = \int \frac{2}{x^2 + 2} dx - \int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 2} dx = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$= 2 \int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$= \sqrt{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) + C \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x-1}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{3x}{x^2} dx - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$= \int_{-2}^{-1} \frac{3}{x} dx - \int_{-2}^{-1} x^{-2} dx = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= 3 \ln |x| \Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-1} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= -3 \ln 2 - \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

PROBLEMA 4

a) Să se determine constantele m, n, p astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (mx^2 + nx + p)e^x$ să fie primitiva funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.

b) Să se calculeze integrala $I(a) = \int_a^0 (2x^2 - 3x) e^x dx$ unde a este un parametru real.

(propusă de prof. Crișan Gabriela – Liceul Tehnologic „Cserey-Goga” Crasna)

Soluție

Pentru definiția primitivei1 punct

Pentru calcularea lui $F'(x)$ 1 punct

Din $F'(x) = f(x)$ obținem $m=1, n=-2, p=2$ 2 puncte

Aplicarea corectă a integrării prin părți2 puncte

Finalizare $I(a) = (-2a^2 + 7a - 7)e^a + 7$ 1 punct