

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Clasa a XI-a, specializarea Științe ale naturii

PROBLEMA 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = (1 \ 3 \ 2)$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- a) Calculați $S = A - XY$.
- b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.
- c) Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

a) $XY = A$, deci $S = A - A = O_3$ 2p

b) $BC = I_3 + aA + A + aA^2 = I_3 + (a+1)A + aA^2$ unde $A^2 = 14A$ 1p

Din $A^2 = 14A$ rezultă $BC = I_3 + (15a+1)A$ 1p

$BC = I_3 \Leftrightarrow 15a+1=0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{15}$ 1p

c) Prin inducție matematică. Fie $p(n)$: " $A^{n+1} = 14A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ "

Parcurge etapa verificării: $p(1)$: $A^2 = 14A$, adevărată din b) 1p

Demonstrează implicația $p(k) \rightarrow p(k+1)$ 1p

PROBLEMA 2

Se consideră determinantul $d(x,y) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & y \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $x, y \in R$.

- a) Notăm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) rădăcinile ecuației $d(x, 2) = 0$. Scrieți ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_1, 3)$ și $B(x_2, -1)$.
- b) Arătați că există $x, y \in Z$, $x \neq y$ pentru care $d(x, y) = d(y, x)$.
- c) Determinați cel mai mic număr $y \in Z$ pentru care $d(x, y) \neq 0$, $\forall x \in R$.

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

a) $d(x, 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ **1p**

Ecuția dreptei determinată de $A(1, 3)$ și $B(3, -1)$ este $2x + y - 5 = 0$ **1p**

b) $d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow x^2 + 2y - 4x - 1 = y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$, de unde

$(x - y)(x + y - 6) = 0$. Deoarece $x \neq y$, rezultă $x + y - 6 = 0$ **1p**

De exemplu pentru $x = 2, y = 4$ sau $x = -1, y = 7$ relația se verifică **1p**

c) $d(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2y - 1 \neq 0$

Funcția de gradul al doilea $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 - 4x + 2y - 1$ este nenulă

dacă $\Delta < 0$, adică $5 - 2y < 0 \Rightarrow y > \frac{5}{2}$ **2p**

Cel mai mic număr $y \in Z$ care verifică relația este $y = 3$ **1p**

PROBLEMA 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}, & x \leq 1 \\ \frac{2x + a}{3x}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine

numărul real a astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0 = 1$.

Prof. Ghiman Cornelia, Lic. Tehnologic "Voievodul Gelu", Zalău

Soluție:

Se scrie condiția pentru ca funcția f are limită în punctul $x_0 = 1$

$$f \text{ are limită în } x_0 = 1 \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1) \quad 1 \text{ p}$$

Se calculează

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \frac{4}{3} \quad 1.5 \text{ p}$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x + a}{3x} = \frac{2 + a}{3} \quad 1.5 \text{ p}$$

$$\text{Se obține } \frac{2 + a}{3} = \frac{4}{3} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Se deduce că } 2 + a = 4 \text{ și se rezolvă ecuația} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Se obține rezultatul } a = 2 \quad 1 \text{ p}$$

PROBLEMA 4

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^2 - (1 + 2x)^3}{x^2}$.

b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{ax^2 + bx + c}) = 2$.

Selectată de prof. Jecan Ioan, C.N.S. Zalău

Rezolvare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^2 - (1+2x)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+6x+9x^2-1-6x-12x^2-8x^3}{x^2} =$ **1p**

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^3 - 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-8x - 3) = -3$$
 1p

b) Se impun condițiile $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$

Avem cazul de nedeterminare $\infty - \infty$. Amplificăm cu conjugata și obținem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x^2 + x - ax^2 - bx - c)}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-a)x^3 + (1-b)x^2 - cx}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$
 2p

Avem $2-a=0 \Rightarrow a=2$; $1-b=0 \Rightarrow b=1$; $-\frac{c}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}=2 \Rightarrow c=-4\sqrt{2}$ **3p**

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timpul de lucru este de 3 ore.