

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a X-a, specializarea uman

Notă: Orice soluție prezentată, alta decât cea din barem se evaluează la punctajul maxim aferent problemei

### PROBLEMA 1

a) Să se demonstreze că numerele:  $A = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$ ,

$B = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$  și  $C = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{16}}$  sunt numere naturale.

b) Să se calculeze  $A = \lg\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$

### Soluție

a)  $A = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 4 - 5 = 7 \dots 1 \text{ punct}$

$B = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = |3 + \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6 \dots 1 \text{ punct}$

$C = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{16}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{4}{6}} = 2^0 = 1 \dots 2 \text{ puncte}$

b)  $A = \lg\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = \lg\left(\frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \lg\left(\frac{999}{1000}\right) \dots 1 \text{ punct}$

$= \lg\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000}\right) = \lg\left(\frac{1}{1000}\right) \dots 1 \text{ punct}$

$$= \lg 10^{-3} = -3$$

..... 1 punct

## **PROBLEMA 2**

a) Se dă numărul  $a = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$ . Să se demonstreze că  $a^{-1} = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ .

b) Să se calculeze  $\log_2 \sqrt{2} + 6\log_4 \sqrt[6]{2 + \sqrt{2}} + \frac{5}{2} \log_2 \sqrt[5]{2 - \sqrt{2}}$

### **Soluție:**

a)  $a^{-1} = \sqrt[3]{(9 + 4\sqrt{5})^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$  ..... 2 puncte

b)  $\log_2 \sqrt{2} + 6\log_4 \sqrt[6]{2 + \sqrt{2}} + \frac{5}{2} \log_2 \sqrt[5]{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\log_2 (2 + \sqrt{2})}{\log_2 4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \log_2 (2 - \sqrt{2}) \dots$   
 ..... 2 puncte

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \log_2 (2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log_2 (2 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} [1 + \log_2 (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})] = \dots\dots\dots 2 puncte$$

$$= \frac{1}{2} [1 + \log_2 (2^2 - \sqrt{2}^2)] = \frac{1}{2} (1 + \log_2 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \dots\dots\dots 1 punct$$

## **PROBLEMA 3**

a) Să se determine mulțimea valorilor lui  $x$  pentru care are sens expresia

$$E(x) = \sqrt{2x - 1} + \log_2 (-x^2 + 2x + 3). \text{ Să se calculeze } E(1).$$

b) Să se reprezinte grafic funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow R, f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$

### **Soluție**

a)  $x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right) \cap (-1, 3) = \left[ \frac{1}{2}, 3 \right)$  ..... 2 puncte

$$E(1) = 1 + \log_2 (-1 + 5) = 3 \dots\dots\dots 1 punct$$

b)

$x$		$-1$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$2$	..... 1 punct
$f(x)$			$1$	$0$	$-1$	

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = 1, \quad f(0) = \log_{\frac{1}{3}}1 = 0, \quad f(2) = \log_{\frac{1}{3}}3 = -1 \dots 1 \text{ punct}$$

reprezentare grafică ..... 2 puncte

#### **PROBLEMA 4**

Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{R}$  ecuațiile:

a)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-2}$

b)  $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$

#### **Soluție**

a) Cond.  $x \in [2, +\infty)$  ..... 1 punct

$$x+2 + x-2 + 2\sqrt{x^2-4} = 3x-2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-4} = x-2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$4(x-2)(x+2) = (x-2)^2 \Rightarrow (x-2)[4(x+2) - x + 2] = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x = 2 \in [2, +\infty), x = -\frac{10}{3} \notin [2, +\infty) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b)  $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + 2^2 \cdot 2^x = 160 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x = 80 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Notăm  $y = 2^x > 0$ ,  $y^2 + 2y - 80 = 0$ ,  $y_1 = -10 < 0$ ,  $y_2 = 8 > 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$y = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

*Subiect propus de prof. Szabo Hajnalka – Liceul Pedagogic “Gheorghe Șincai” Zalău*