

T3

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A XII-A

Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Științe ale naturii

SUBIECTUL I

Se consideră grupul (G, \circ) , unde $G = (0, \infty)$, iar legea „ \circ ” este definită pe $G \times G$ prin :

$$x \circ y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}, \forall x, y \in G.$$

- Să se verifice că $e = 4$ este elementul neutru al grupului (G, \circ) .
- Determinați numărul real a știind că funcția bijectivă $f: G \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2^3 x - a$ este un izomorfism între grupurile (G, \circ) și $(\mathbf{R}, +)$.
- Pentru $a = 8$ rezolvați în G ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ 2015\ ori} = 4$.

SUBIECTUL II

Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_2(\mathbf{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$ și legea „ \circ ” definită prin

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A^2 + B^2), (\forall) A, B \in G, \text{ unde } A^2 = A \cdot A.$$

- Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu legea „ \circ ”.
- Determinați simetricul elementului $A(2015)$ în raport cu legea „ \circ ”.
- Determinați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $A(x) \circ A^2(x) \circ \dots \circ A^{2015}(x) = A(2015)$, unde $A^2(x) = A(x) \cdot A(x)$

SUBIECTUL III

Fie funcțiile $f, g, G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 2014) \cdot (e^x + 2015)}$, $g(x) = \frac{e^x}{e^x + a}$ și

$$G(x) = \ln(e^x + a) \text{ cu } a > 0.$$

- Arătați că $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2014} - \frac{e^x}{e^x + 2015}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.
- Arătați că G este o primitivă a funcției g .
- Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F(0) = 0$.

SUBIECTUL IV

Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{6045(\sqrt[3]{x} - 1)}{x - 1} - 2015 & , x < 1 \\ x^2 + \ln x - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$.

- Arătați că funcția admite primitive pe \mathbf{R} .
- Arătați că orice primitivă a lui f este convexă pe intervalul $(1, \infty)$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii. • Timp de lucru efectiv trei ore.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș