



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a V-a

1. Fie  $a = 2015 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014)$  și  $b = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2015$ .

a) Arătați că  $a$  și  $b$  sunt pătrate perfecte .

b) Arătați că  $2015 + a < 4b$

*Prof. Gobej Adrian, Curtea de Argeș*

2. Determinați numerele naturale prime  $a$ ,  $b$  și  $c$  pentru care are loc egalitatea  $2a + 5b + 6c = 50$ .

*GM 5/2014*

3. Determinați mulțimile  $X$  și  $Y$  știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

(i)  $X \cup Y \subset \{1; 2; 3; 4\}$  ;

(ii)  $X \cap Y \supset \{1; 2\}$ ;

(iii)  $X \setminus Y \subset \{1; 2; 4\}$ ;

(iv)  $\{1; 2; 3\} \not\subset Y$ ;

(v)  $X$  are mai puține elemente decât  $Y$ .

\*\*\*\*\*

4. Pentru o excursie școlară s-au închiriat autocare la preț de 5 lei pe kilometru, iar lungimea traseului a fost stabilită la 600 km. Din diferite motive, 6 elevi s-au retras din excursie, iar traseul efectiv a fost mai scurt, în așa fel încât prețul transportului pe elev nu s-a modificat. Știind că s-au plătit 2700 lei pentru autocare, aflați lungimea efectivă a traseului parcurs și numărul de elevi înscriși inițial.

*Prof. Constantin Bozdog, Reghin*

NOTĂ:

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN VRANCEA



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VI-a

1. Aflați numărul natural  $\overline{xy}$  dacă  $\frac{\overline{xyxyxy}}{\overline{yxyxyx}} = \frac{4}{7}$ .

*GM 5/2014*

2. Arătați că numărul  $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2015}$  este divizibil cu 200.

*prelucrare GM 2014*

3. Se consideră segmentul AB și O mijlocul său. Pe o dreaptă  $d$  ce trece prin O (diferită de AB) se consideră de o parte și de alta a lui O punctele M și N ( $M, N \in d$ ) astfel încât unghiurile  $\sphericalangle MBO$  și  $\sphericalangle NAO$  sunt congruente. Arătați că  $[MA] \equiv [NB]$ .

\* \* \*

4. Se consideră două unghiuri adiacente și suplementare. Bisectoarea celui mai mare dintre ele formează cu o latură a celui alt unghi de  $110^\circ$ . Aflați măsurile celor două unghiuri.

\* \* \*

**NOTĂ:** Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
Etapa locală - 14.02.2015  
Clasa a VII-a

1. a) Arătați că  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} > \sqrt{2015}$ .
- b) Fie  $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015 \cdot 2014}}$ . Determinați  $[x\sqrt{2015}]$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

\*\*\*

2. Fie  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a^2 + b^2 = c^2$  și  $a \leq b$ . Arătați că:
- a)  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \notin \mathbb{Q}$ ;
- b) dacă  $a \not\equiv 5, b \not\equiv 5$  și  $\text{cmmdc}(a, b) = 1$ , atunci  $\sqrt{a^2 b^2 + c^2} \in \mathbb{N}$ .

profesor Laurențiu Țibrea

3. În paralelogramul  $ABCD$ , considerăm  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $M, N \in (AC)$  astfel încât  $A-M-N$  și  $(AM) \equiv (NC)$ . Dacă  $DM \cap BC = \{L\}$  și  $BN \cap CD = \{T\}$ , arătați că:
- a)  $(DN) \equiv (BM)$ ;
- b)  $L, O, T$  sunt coliniare.

\*\*\*

4. În triunghiul  $ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$ , considerăm bisectoarea  $[BE]$ ,  $E \in [AC]$  și un punct  $D$  pe  $[BC]$  astfel încât  $BC = 3 \cdot BD$ . Dacă  $\{O\} = BE \cap AD$  și  $F$  este mijlocul lui  $[AB]$ , arătați că  $F, O$  și  $C$  sunt coliniare.

GM 11/2014

NOTĂ:

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală - 14.02.2015**  
**Clasa a VIII-a**

1. Fie ecuația:  $7(1-x):m - 2x = 2(1-x)$ , cu  $m$  parametru real nenul.
  - a) Să se rezolve ecuația.
  - b) Să se determine  $m$  număr întreg pentru care partea întreagă a soluției ecuației este egală cu 1.
2. Fie  $x, y, z$  numere reale strict pozitive. Să se arate că:
  - a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} \geq \frac{4}{x+2y}$
  - b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{8}{3} \left( \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{y+2z} + \frac{1}{z+2x} \right)$
3. Pe planul pătratului ABCD se ridică de aceeași parte perpendicularele AM și CN.
  - a) Să se arate că dreptele MN și BD sunt perpendiculare.
  - b) Dacă  $AB=3$ ,  $AM=4$ ,  $CN=4-\sqrt{7}$ , să se calculeze distanțele de la M la BN și de la M la planul (BCN).
4. Fie piramida patrulateră regulată VABCD,  $\{O\}=AC \cap BD$  și  $P, Q \in (VO)$ . Dacă  $\{E\}=AP \cap CV$ ,  $\{F\}=CP \cap AV$ ,  $\{S\}=BQ \cap DV$  și  $\{T\}=DQ \cap BV$ , arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depinde de alegerea punctelor P și Q pe segmentul VO.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a IX-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $[2x - 5] = \sqrt{2} \cdot [3x - 7]$ .

\*\*\*

2. Dacă  $x, y, z$  sunt numere reale pozitive cu  $x + y + z = 2015$ , demonstrați că

$$\sqrt{2015x + yz} + \sqrt{2015y + zx} + \sqrt{2015z + xy} \leq 4030.$$

\*\*\*

3. Demonstrați că în orice triunghi  $ABC$ , avem relația  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ , unde notăm centrul cercului circumscris cu  $O$  și ortocentrul cu  $H$ .

\*\*\*

4. Într-un triunghi  $ABC$ , fie  $D, E$  și respectiv  $F$  punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile  $BC, CA, AB$ . Arătați că dacă  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DC}$ , atunci triunghiul  $ABC$  este echilateral.

S.GM 3/2014

NOTĂ:

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.





## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația:  $\frac{1}{2^x + 3^x} + \frac{1}{3^x + 4^x} + \frac{1}{6^x + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} \right)$ .

Marian Cucoaneș, GM 2/2014

2. Să se arate că dacă  $x = \log_2 6$  și  $y = \log_3 6$ , atunci au loc relațiile:

a)  $x + y = xy$ ,  $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ .

b)  $x^2 + y^2 > 8,81$ .

Traian Sfetcu

3. Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ . Să se rezolve ecuațiile  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = 3$ .

Să se discute în funcție de valorile lui  $\alpha \in \mathbf{R}$ , numărul soluțiilor ecuației  $f(x) = \alpha$ .

Traian Sfetcu

4. Fie  $z_1 = x - y\varepsilon$ ,  $z_2 = y - z\varepsilon$ ,  $z_3 = z - x\varepsilon$ , numere complexe cu  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 2$ ,  $|z_3| = 3$  unde  $x, y, z$  sunt reale, diferite și  $\varepsilon$  este o rădăcină de ordin trei a unității diferită de 1. ( $\varepsilon^3 = 1$ ,  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ).

a) Să se arate că  $z_1, z_2, z_3$  sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

b) Dacă  $xy + yz + zx = 0$ , să se calculeze aria triunghiului.

Traian Sfetcu

NOTĂ:

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI -a

1) Se consideră șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .

a) Demonstrați convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

b) Considerând cunoscut faptul că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$ , calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{x_{n+1}} - e^{x_n})$ .

\*\*\*

2) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  pentru  $a_n = \left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 9} \right\}$ ,  $n \geq 1$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

S, GM 12/2014

3) Fie  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 2$ , astfel încât  $A^3 = I_n$  și matricea  $I_n - A$  este inversabilă.

a) Demonstrați că matricea  $I_n + A$  este inversabilă și determinați inversa ei în funcție de  $A$ .

b) Calculați  $\det(I_n + A)$ .

\*\*\*

4) Fie  $A$  o matrice pătratică cu elemente întregi având determinantul egal cu 2. Să se demonstreze că cel puțin un complement algebric al matricei  $A$  este număr întreg impar.

GM 9/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

### Clasa a XII-a

1. Fie funcția  $f: Z_9 \rightarrow Z_9$ ,  $f(x) = x^2$ . Să se determine submulțimile nevide  $A$  ale mulțimii  $Z_9$  cu proprietatea  $f(A) = A$ .

GM 9/2014

2. Pe  $R$  se consideră legea de compoziție  $x * y = 2015xy - 2014x - 2014y + 2014$ ,  $x, y \in R$ .

a) Să se arate că  $*$  este asociativă;

b) Să se afle  $\alpha \in R$  astfel încât  $x * x \geq \alpha$ , pentru orice  $x \in R$ ;

c) Să se calculeze  $\frac{1}{2015} * \frac{2}{2015} * \dots * \frac{2015}{2015}$ .

3. Fie  $f: R \rightarrow R$  o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că există  $a, b \in R$   $a \neq b$  astfel încât  $f(a) + 2f(b) = 0$ .

4. Să se calculeze  $\int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**NOTĂ:**

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.





## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală - 14.02.2015

Filiera tehnologică, profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Se consideră matricea  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .
  - a) Să se demonstreze că  $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ , pentru orice număr real  $x$ .
  - b) Dacă  $A^2 = O_2$ , să se demonstreze că  $a+d=0$ .
  - c) Știind că  $A^2 = O_2$ , să se calculeze  $\det(A + 2015I_2)$ .
2. Să se calculeze: a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{(x^2 - 4)^3}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^{\frac{x-5}{2}} - 2}{\sin(9-3x)}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2e^{3x} + 2014)}{\ln(3e^{2x} + 2015)}$ .
3. a) Considerăm funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-3}\right)$ . Determinați ecuațiile asimptotelor verticale la graficul funcției.  
b) Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care graficul funcției admite asimptotă orizontală la  $+\infty$  de ecuație  $y = 2$ .
4. Se consideră mulțimea  $M$  formată din toate matricele cu 2 linii și 2 coloane și care au toate elementele din mulțimea  $\{0, 1, 2\}$ , iar elementul de la intersecția dintre linia 1 și coloana 1 este diferit de 0.
  - a) Să se găsească o matrice  $A \in M$  pentru care  $\det(A) = 0$  și o matrice  $B \in M$  pentru care  $\det(B) \neq 0$ .
  - b) Să se arate că, dacă  $X \in M$ , atunci  $-4 \leq \det(X) \leq 4$ .
  - c) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $M$ .

NOTĂ:

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală - 14.02.2015

Filiera tehnologică, profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

[1] Pe mulțimea  $G = (-2, 2)$  se consideră legea de compoziție:  $x \circ y = \frac{4(x+y)}{4+xy}$ .

a) Să se arate că  $(G, \circ)$  este grup comutativ.

b) Să se arate că funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{2+x}{2-x}$  este un izomorfism între grupurile  $(G, \circ)$  și  $(\mathbb{R}, +)$ .

[2] a) Se consideră funcțiile  $f, F: \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ ,  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$ .

Să se determine numerele reale  $a, b, c$  știind că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  pe  $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ .

b) Să se determine funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , derivabilă pe  $(0, \infty)$  care verifică relațiile

i)  $xf'(x) = (2x^2 + 1)f(x)$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ ;      ii)  $f(1) = e^3$ .

[3] Definim pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție  $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$ . Fie, de asemenea,  $G = (3, \infty)$ .

a) Demonstrați că  $\circ$  este asociativă și comutativă;

b) Determinați  $E \in \mathbb{R}$  astfel încât  $E \circ x = x \circ E = E$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

c) Rezolvați în  $G$  ecuația  $x \circ x \circ x = x$ ;

d) Studiați dacă  $H = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu  $\circ$  (Justificare!).

[4] a) Să se determine funcția derivabilă  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  al cărei grafic trece prin punctul  $B(1, 1)$

și pentru care tangenta la grafic în orice punct  $M(b, G(b))$  are panta  $g(b) = 2b + 1$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ .

b) Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \min_{t \leq x} (t^2 - t + 1), & x \leq \frac{1}{2} \\ \max_{t \geq x} (-t^2 + t + 1), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ .

i) Demonstrați că  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ -x^2 + x + 1, & \forall x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$ ;

ii) Studiați dacă  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$  (folosind, eventual, rezultatul de la punctul i)).

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.