



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 18.02.2017

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Se dau numerele:

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2016}}{2017} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}} \right) \text{ și}$$

$$B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{2017}{\sqrt{2016}} \right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{6\sqrt{4}}{5} + \frac{8\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{2018\sqrt{2016}}{2017} \right).$$

Să se arate că $|A + x| = |B - x|, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 2016| = 2017(x - 2017)$.

SUBIECTUL 2

Fie $x, y \in \mathbf{Z}^*$.

a) Arătați că există o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$ astfel încât $\frac{9^x + 1}{9^y + 1} = \frac{3^x}{3^y}$.

b) Arătați că dacă $\frac{9^x - 1}{9^y - 1} = \frac{3^x}{3^y}$, atunci $x = y$.

SUBIECTUL 3

Într-un triunghi ascuțitunghic, o înălțime și o mediană construite din vârfuri diferite formează un unghi cu măsura de 60° . Arătați că înălțimea și mediana au aceeași lungime.

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC și $(AM$ bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$, $M \in (BC)$). Se duc $MD \parallel AB$, $D \in AC$, $E \in AB$ astfel încât $[AE] \equiv [AD]$, $DF \parallel AM$, $F \in BC$, $P \in [ED]$ astfel încât $MP \perp AC$, $MP \cap DF = \{S\}$, $EM \cap DS = \{Q\}$. Demonstrați că:

a) $ES \perp PQ$

b) Triunghiul PEQ este isoscel

c) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}$

Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu