



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 18.02.2017

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie mulțimea $G = (-1;1)$ înzestrată cu legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in (-1;1)$. Admitem

cunoscut faptul că $(G, *)$ este un grup abelian.

a) Arătați că funcția $g : \mathbf{R} \rightarrow (-1;1)$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbf{R}, +)$ și $(G, *)$.

b) Să se determine toate morfismele de la $(G, *)$ la grupul $(\mathbf{R}, +)$ care sunt funcții continue.

SUBIECTUL 2

Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbf{Q}^* \mid x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbf{Q}\}$. Arătați că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe G o structură de grup abelian.

SUBIECTUL 3

Calculați $\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2017} dx$, $x, y \in (0; \infty)$.

SUBIECTUL 4

Determinați primitivele funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{2017x} \cdot \sin^{2016} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin x$.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu