

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A V-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră șirul 10, 13, 16, 19, Calculați al 2016-lea termen al șirului.

Soluție.

$$a_1 = 10 = 3 \cdot 3 + 1, a_2 = 13 = 3 \cdot 4 + 1, a_3 = 16 = 3 \cdot 5 + 1, a_4 = 19 = 3 \cdot 6 + 1 \dots\dots\dots 4p$$

$$a_{2016} = 3 \cdot (2016 + 2) + 1 = 6055 \dots\dots\dots 3p$$

2. Determinați numerele de forma \overline{abc} care împărțite la \overline{bc} dau câtul și restul egale cu 18.

Daniela Cerchez, Brăila

Soluție.

$$100a + \overline{bc} = 18\overline{bc} + 18 \Rightarrow 100a = 17\overline{bc} + 18 \dots\dots\dots 1p$$

$$U(17\overline{bc} + 18) = U(100a) = 0 \Rightarrow c = 6 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Avem } 17b + 12 = 10a \Rightarrow U(17b + 12) = U(10a) = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{În concluzie, } \overline{abc} = 846 \dots\dots\dots 1p$$

3. a) Scrieți numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.

b) Scrieți numărul 100^{2017} ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Mazalu Ionuț, Brăila

Soluție.

$$a) 100 = 1 + 8 + 27 + 64 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots\dots\dots 3p$$

b) $100^{2017} = 100 \cdot 100^{2016} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot 100^{2016}$ 2p

$100^{2017} = (100^{672})^3 + (100^{672} \cdot 2)^3 + (100^{672} \cdot 3)^3 + (100^{672} \cdot 4)^3$ 2p

4. Vom numi o submulțime M cu trei elemente a mulțimii $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ de “**tip Z**” dacă produsul elementelor mulțimii M are ultima cifră 0. Determinați numărul submulțimilor lui A de “**tip Z**”.

Daniela și Nicolae Stănică, G.M.

Soluție.

Fie $M = \{a, b, c\}$.

Cazul I: $a = 5$ 3p

Produsul elementelor b și c trebuie să fie număr par.

- 1) Dacă $b = 2$, atunci $c \in \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, adică 8 submulțimi.
- 2) Dacă $b = 4$, atunci $c \in \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$, adică 7 submulțimi.
- 3) Dacă $b = 6$, atunci $c \in \{1, 3, 7, 8, 9, 10\}$, adică 6 submulțimi.
- 4) Dacă $b = 8$, atunci $c \in \{1, 3, 7, 9, 10\}$, adică 5 submulțimi.

În total, pentru acest caz sunt 26 de submulțimi.

Cazul II: $a = 10$ 3p

Produsul elementelor b și c poate fi par sau impar. Din cele 36 de submulțimi posibile pentru $a = 10$, eliminăm submulțimile care au fost deja utilizate în cazul I. În comun sunt 4 mulțimi, $\{5, 2, 10\}$, $\{5, 4, 10\}$, $\{5, 6, 10\}$, $\{5, 8, 10\}$.

În total, pentru acest caz sunt 32 de submulțimi.

Numărul submulțimilor care verifică datele problemei sunt $26 + 32 = 58$ submulțimi.....1p