

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A VIII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Dacă $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 1, m \neq -1$ și $|ma + b| = |a + mb|$, arătați că $|a| = |b|$.

Soluția 1.

Prin ridicare la pătrat, din egalitatea $|ma + b| = |a + mb|$ obținem $(ma + b)^2 = (a + mb)^2$ 3p

$(m^2 - 1)a^2 = (m^2 - 1)b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$ 4p

Soluția 2.

$|ma + b| = |a + mb| \Rightarrow ma + b = a + mb$ sau $ma + b = -(a + mb)$ 3p

$ma + b = a + mb \Rightarrow (a - b)(m - 1) = 0 \Rightarrow a = b$ 2p

$ma + b = -(a + mb) \Rightarrow (a + b)(m + 1) = 0 \Rightarrow a = -b$ 2p

2. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ se consideră punctele M și P mijloacele muchiilor $[D'C']$ și $[BC]$. Dacă $AC \cap BD = \{O_1\}$, $AD' \cap A'D = \{O_2\}$ și punctele S, T mijloacele segmentelor $[O_1M]$, $[PO_2]$, atunci determinați măsura unghiului dintre dreptele ST și $B'C'$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

$D'MPO_1$ paralelogram $\Rightarrow D', S, P$ coliniare și $D'S = SP$ 3p

Din $D'S = SP$ și $O_2T = TP \Rightarrow (ST)$ linie mijlocie în $\Delta D'O_2P \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow ST \parallel D'O_2 \Rightarrow m(\angle ST, B'C') = m(\angle D'O_2, A'D') = 45^\circ$ 2p

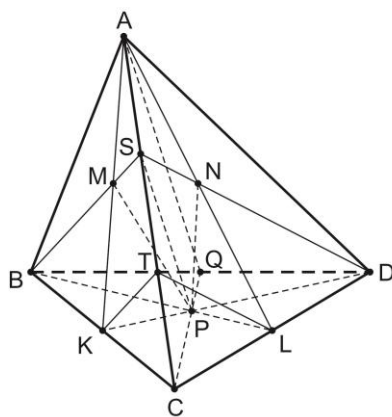
3. Fie tetraedrul $ABCD$, punctele K, L, M, N mijloacele segmentelor $[BC], [CD], [AK]$ și respectiv $[AL]$, iar punctul P este intersecția dreptelor BL și DK . Demonstrați că dreapta de intersecție a planelor (BMP) și (DNP) este paralelă cu planul (ABD) .

Marius Damian, Brăila

Soluție.

Fie $\{S\} = BM \cap AC$, $\{Q\} = CP \cap BD$ și T mijlocul segmentului $[SC]$.

P este centrul de greutate al triunghiului BCD , deci $\frac{PQ}{PC} = \frac{1}{2}$ 1p



$[TK]$ linie mijlocie în $\triangle CSB$, $TK \parallel SB \Rightarrow SM \parallel TK$ și M mijlocul lui $[AK] \Rightarrow [SM]$ linie mijlocie în $\triangle ATK$. În consecință, S mijlocul lui $[AT]$, deci $AS = ST = TC \Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{1}{2}$.. 2p

Din $AS = ST$ și $AN = NL \Rightarrow [SN]$ linie mijlocie în $\triangle ATL$, deci $SN \parallel TL$. Simultan, din $ST = TC$ și $DL = LC \Rightarrow [TL]$ linie mijlocie în $\triangle CSD$, deci $SD \parallel TL$. Dar în planul (ACD) paralela dusă prin punctul S la dreapta TL este unică, lucru care spune că punctele S, N, D sunt coliniare. S și P sunt puncte comune planelor distincte (BMP) și (DNP) , deci $(BMP) \cap (DNP) = SP$ 2p

În plus, $\frac{PQ}{PC} = \frac{SA}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow SP \parallel AQ \Rightarrow SP \parallel (ABD)$ 2p

4. Un număr natural $n = \overline{abcd}$ este pătrat perfect. Mărim cifra miilor cu 3, a sutelor cu 1, pe cea a zecilor o micșorăm cu 2, iar pe cea a unităților o păstrăm neschimbată și obținem astfel un alt pătrat perfect. Determinați numărul natural n .

Carmen și Viorel Botea, G.M.

Soluție.

$$\overline{(a+3)(b+1)(c-2)d} = k^2, \quad \overline{abcd} = x^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{(a+3)(b+1)(c-2)d} - \overline{abcd} = k^2 - x^2 = (k-x)(k+x) = 3080 \dots\dots\dots 3p$$

$$1. \begin{cases} k-x=14 \\ k+x=220 \Rightarrow x=103 \text{ fals} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} k-x=20 \\ k+x=154 \Rightarrow x=67 \Rightarrow n=4489 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} k-x=22 \\ k+x=140 \Rightarrow x=59 \Rightarrow n=3481 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$4. \begin{cases} k-x=10 \\ k+x=308 \Rightarrow x=149 \text{ fals} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} k-x=28 \\ k+x=110 \Rightarrow x=41 \Rightarrow n=1681 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} k-x=44 \\ k+x=70 \Rightarrow x=13 \text{ fals} \end{cases}$$

$$\text{deci } \overline{abcd} \in \{1681, 3481, 4489\} \dots\dots\dots 1p$$