

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

Clasa a XI-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Se consideră numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 4$ și

$$\text{determinanții } A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

- a) Arătați că $A = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$.
b) Demonstrați că $A = B$.
c) Arătați că, pentru orice trei puncte distincte din plan, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural.

Soluție.

a) calcul direct sau cu ajutorul proprietăților.....2p

$$b) B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 + 3a + 4 & b^2 + 3b + 4 & c^2 + 3c + 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = A \dots\dots\dots 3p$$

c) Fie $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c))$ trei puncte distincte pe graficul funcției f cu proprietatea că $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} = B = A = (b-a)(c-a)(c-b) \dots\dots\dots 1p$$

Oricum am alege trei numere naturale, două dintre acestea au aceeași paritate, deci diferența lor este un număr par, de unde rezultă că aria triunghiului este număr natural.....1p

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că, dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există numerele reale a

și b astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b) Rezolvați în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = A$.

Soluție.

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $AX = XA \Rightarrow a = d$ și $b = c$ 2p

b) Dacă X este soluție a ecuației $\Rightarrow AX = X^4$ și $XA = X^4$ 2p

Atunci, conform pct. a) avem $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow X^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 3ab^2 & b^3 + 3a^2b \\ b^3 + 3a^2b & a^3 + 3ab^2 \end{pmatrix}$ 1p

$a = 3, b = 1$ 2p

3. Fie numerele reale nenule a și b . Determinați valorile posibile ale limitei:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a\sqrt{x^2 + x + 1} + b\sqrt{9x^2 + 2x + 1} \right).$$

Soluție.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(a\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + b\sqrt{9 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \infty \cdot (a + 3b) \dots\dots\dots 2p$$

Dacă $a + 3b > 0$ limita este egală cu $+\infty$ 1p

Dacă $a + 3b < 0$ limita este egală cu $-\infty$ 1p

Dacă $a + 3b = 0 \Rightarrow a = -3b$ și limita devine:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a\sqrt{x^2 + x + 1} + b\sqrt{9x^2 + 2x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} b \left(\sqrt{9x^2 + 2x + 1} - 3\sqrt{x^2 + x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} b \frac{-7x - 8}{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{-7b}{6} \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

4. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Determinați

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției admite $x = 3$ asimptotă verticală, asimptotă oblică $y = x + 2$ și $f(1) = 1$.

Soluție.

$x = 3$ asimptotă verticală, deci $d = -3$ 2p

$y = x + 2$ asimptotă oblică, implică $a = 1, b = -1$ 3p

Din $f(1) = 1$ rezultă $c = -2$ 2p