

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016**  
**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

**Clasa a XII-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

1. Pe mulțimea  $G = (0,1)$  se definește legea de compoziție

$$x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - x - y}, (\forall) x, y \in (0,1).$$

a) Arătați că, oricare ar fi  $x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$ .

b) Se definește funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0,1), f(x) = \frac{x}{x+1}$ . Știind că  $(G, *)$  este grup, demonstrați că funcția  $f$  este un izomorfism de la grupul  $((0, +\infty), \cdot)$  la grupul  $(G, *)$ .

**Soluție.**

a) Fie  $x, y \in G \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$  și  $\left| y - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( y - \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0 < 2xy - x - y + 1 < 1. \quad (1)$

$$x * y \in G \Rightarrow 0 < \frac{xy}{2xy + 1 - x - y} < 1. \text{ Prima parte a inegalității este adevărată din ipoteză}$$

și din relația (1).....2p

$$\frac{xy}{2xy + 1 - x - y} < 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \text{ care este adevărată } (\forall) x, y \in (0,1).....2p$$

b)  $f'(x) > 0, (\forall) x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$  strict crescătoare, deci injectivă.....1p

Cum  $f$  continuă și  $f((0, +\infty)) = (0,1) \Rightarrow f$  surjectivă

În concluzie,  $f$  funcție bijectivă.....1p

$$f(x \cdot y) = \frac{xy}{1 + xy}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{\frac{2xy}{(x+1)(y+1)} + 1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}} = \frac{xy}{1 + xy}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y), (\forall) x, y \in (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ morfism.}$$

Cum  $f$  bijectivă și morfism,  $\Rightarrow f$  izomorfism de grupuri.....1p

2. Se definește mulțimea  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \right\}$ . Demonstrați că mulțimea  $M$

împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup abelian.

**Soluție.**

Se demonstrează că:  $A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$  .....1p

partea stabilă:  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 1) \in M, (\forall) A(x), A(y) \in M$  .....1p

asociativitatea: înmulțirea matricelor este asociativă.....1p

comutativitatea: se verifică prin calcul direct.....1p

elementul neutru:  $A(-1) \in M$  element neutru.....1p

orice element este simetrizabil:  $A(x') = A(-x - 2) \in M$  .....2p

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{1004} + 2016^x$ .

a) Calculați  $\int f(x) dx$ .

b) Arătați că orice primitivă a funcției  $f$  este o funcție strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

**Soluție.**

a)  $\int f(x) dx = \int x^{1004} + 2016^x dx = \frac{x^{1005}}{1005} + \frac{2016^x}{\ln 2016} + c, c \in \mathbb{R}$  .....3p

b) Fie  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f$ .

$F'(x) = f(x) = x^{1004} + 2016^x > 0 \Rightarrow F$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$  .....4p

4. Se definește funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ .

a) Arătați că  $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ .

b) Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$  și calculați mulțimea primitivelor acesteia pe mulțimea numerelor reale.

**Soluție.**

a) calcul direct.....3p

b) Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  ca funcție elementară, deci admite primitive.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c_1 & x > 0 \\ c_2 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c_3 & x < 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Din condiția de continuitate impusă funcției  $F$ ,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + c & x > 0 \\ c & x = 0, c \in \mathbb{R} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + c & x < 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$