

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profil tehnic**

Clasa a X-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie $E(n) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Arătați că $(\sqrt{n}+1) \cdot E(n) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$.

Soluție.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \dots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-n+1} = \sqrt{n}-1 \dots\dots\dots 4p$$

$$(\sqrt{n}+1) \cdot E(n) = n-1 \in \mathbb{N} \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq 2 \dots\dots\dots 3p$$

2. Dacă $x, y > 0$ și $x^2 + 4y^2 = 12xy$, atunci arătați că $\lg(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg x + \lg y)$.

Soluție.

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg x + \lg y) \Leftrightarrow \lg \frac{x+2y}{4} = \lg \sqrt{xy} \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2y}{4} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 = 16xy \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 12xy \dots\dots\dots 4p$$

3. Să se calculeze suma $\log_2 \frac{\sqrt{1 \cdot 3}}{2} + \log_2 \frac{\sqrt{2 \cdot 4}}{3} + \dots + \log_2 \frac{\sqrt{2016 \cdot 2018}}{2017}$.

Soluție.

$$\log_2 \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2016 \cdot 2018}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2016^2 \cdot 2017^2}} = \dots\dots\dots 4p$$

$$= \log_2 \left(\sqrt{\frac{2018}{2 \cdot 2017}} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1009}{2017} \dots\dots\dots 3p$$

4. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z-1-i| = |z+1+i| = 2\sqrt{2}$.

Soluție.

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}, z_2 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \dots\dots 4p$$