

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016**  
**Filiera teoretică, profilul umanist, Filiera vocațională**

**Clasa a XII-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

1. Se consideră matricele  $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$  și  $V = \begin{pmatrix} \alpha & 9 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ . Să se arate că, dacă

$$X \cdot V = U, \text{ atunci } x \cdot (\alpha^2 - 9) = 0.$$

**Soluție.**

$$X \cdot V = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 9 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + y & 9x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p$$

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 & (1) \\ 9x + \alpha y = 0 & (2) \end{cases} \text{Înlocuind pe } y \text{ din (1) în (2) obținem } x \cdot (\alpha^2 - 9) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

2. Se consideră mulțimea  $H = \{X \in M_2(\mathbb{R}) / X^2 = X\}$ . Să se arate că, dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ , atunci  $a + d \in \{0, 1, 2\}$ .

**Soluție.**

$$\text{Dacă } A \in H, \text{ atunci } A^2 = A, \text{ rezultând sistemul } \begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a + d) = b \\ c(a + d) = c \\ d^2 + bc = d \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

Prin rezolvarea sistemului rezultă  $a + d \in \{0, 1, 2\} \dots\dots\dots 4p$

$$3. \text{ Fie } \Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{x} & 1 + x \\ 1 - \frac{1}{x} & x \end{vmatrix}, \text{ unde } x \in \mathbb{Z}^*. \text{ Determinați valorile întregi ale lui } x \text{ pentru care } \Delta \in \mathbb{Z}.$$

**Soluție.**

Calculul determinantului,  $\Delta = 1 + \frac{1}{x}$  ..... 3p

$x \in \{-1, 1\}$  ..... 4p

4. Fie  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ , unde  $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}(i-j), & i > j \\ \left\lfloor \frac{i+2}{j} \right\rfloor, & i \leq j \end{cases}$  și  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .

a) Arătați că  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\det(A + xI_3) = 3$ .

**Soluție.**

a) Determinarea componentelor  $a_{ij}$  ..... 3p

b)  $\Delta = (1+x)(2+x)(3+x)+3 \Rightarrow$  ..... 2p

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -3$  ..... 2p