

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016**

Filiera teoretică, profilul umanist, Filiera vocațională

Clasa a IX-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Calculați $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016}$.

Soluție.

Observăm că termenii sumei sunt termenii unei progresii geometrice cu:

$$b_1 = 2 \text{ și rația } q = 2 \dots\dots\dots 3p$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{2^{2016} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 2 \dots\dots\dots 4p$$

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică relația $xf(x) + (x+2)f(-x) = x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f(2)$ și $f(-2)$.

b) Determinați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$ astfel încât $f(2) = f(-2) = \frac{1}{2}$.

Soluție.

a) Pentru $x = -2$ obținem: $-2f(-2) + (2-2)f(2) = -2+1 \Rightarrow$

$$-2f(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $x = 2$ obținem $2f(2) + (2+2)f(-2) = 2+1 \Rightarrow$

$$2f(2) + 2 = 3 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) f(-2) = 4 - 2a + b = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$f(2) = 4 + 2a + b = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Se rezolvă sistemul și rezultă } a = 0 \text{ și } b = -\frac{7}{2} \dots\dots\dots 2p$$

3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_x = 100$ și $a_{100} = x$, $x \in \mathbb{N}^*$, $x \neq 100$.

Determinați rația progresiei $(a_n)_{n \geq 1}$.

Soluție.

$$a_x = a_1 + (x-1) \cdot r = 100 \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{100} = a_1 + (100-1) \cdot r = x \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Scădem relațiile de mai sus și obținem } (x-1) \cdot r - 99r = 100 - x \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$(x-100) \cdot r = 100 - x, x \neq 100 \Rightarrow r = -1 \dots\dots\dots 3p$$

4. Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O și P un punct arbitrar din planul său. Demonstrați că are loc relația vectorială $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4 \cdot \overrightarrow{PO}$.

Soluție.

O este mijlocul segmentelor AC și $BD \Rightarrow$

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) \dots\dots\dots 2p$$

Adunând cele două relații obținem:

$$2\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} \dots\dots\dots 3p$$