

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A XI-A, SUBIECTE

1. Fie numărul real $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a^{\frac{kx}{n}} \right) \right] = 1$.

Dan Ion, Brăila

2. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $Tr(A) = 1$ și $\det(A) = 2$. Demonstrați că $\det(A - pI_2) + \det(A^2 - qI_2) + \det(A^3 - tI_2) \geq \frac{21}{4}$, pentru orice $p, q, t \in \mathbb{R}$.

Nicolae Stănică, Brăila

3. Fie $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 3$. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietățile

$$a_0 \in (0, 1) \text{ și } a_{n+1} = a_n - a_n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita 0.

b) Determinați $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$ astfel încât șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dat prin $b_n = \sqrt[\beta]{n} \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ să fie convergent și să aibă limita în $(0, +\infty)$.

Marius Damian, Brăila

4. Calculați suma elementelor matricei A^n , unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Narcis Gabriel Turcu, G.M.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

2. Listele cu elevii calificați la etapa județeană și baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-ul matematicabr.weebly.com.