

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A VII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) + 8} \in \mathbb{N}$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție.

Pentru $n = 1 \Rightarrow \sqrt{10} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 3 \Rightarrow \sqrt{56} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n = 4 \Rightarrow \sqrt{392} \notin \mathbb{N}$ 1p

Pentru $n \geq 5 \Rightarrow U(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) + 8) = 8 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) + 8} \notin \mathbb{N}$ 3p

2. Comparați numerele a și b știind că:

$$a = \frac{1}{2015} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015}\right) \text{ și } b = \frac{1}{2016} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2016}\right).$$

Daniela Cerchez, Brăila

Soluție.

$$\text{Fie } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} = x, x > 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2015} \cdot x \text{ și } b = \frac{1}{2016} \cdot \left(x + \frac{1}{2016}\right) \dots\dots\dots 3p$$

$$a - b = \frac{2016x - 2015}{2015 \cdot 2016^2} > 0 \Rightarrow a > b \dots\dots\dots 4p$$

3. În paralelogramul $ABCD$ se consideră $P \in (BC)$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor APB, APD și DPC , atunci demonstrați că aria triunghiului $G_1G_2G_3$ este a noua parte din aria paralelogramului $ABCD$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

Fie S, T mijloacele $[AP], [DP]$ și $AC \cap BD = \{O\}$

$$\text{Din } R.T. \text{ Thales} \Rightarrow G_1G_2 \parallel BD \xRightarrow{T.F.A.} \Delta G_1SG_2 \sim \Delta BSD \xRightarrow{def.} \frac{G_1G_2}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_1G_2}{BO} = \frac{2}{3} (1) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din } R.T. \text{ Thales} \Rightarrow G_2G_3 \parallel AC \xRightarrow{T.F.A.} \Delta G_2TG_3 \sim \Delta ATC \xRightarrow{def.} \frac{G_2G_3}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_2G_3}{OC} = \frac{2}{3} (2) \dots\dots\dots 2p$$

$$G_1G_2 \parallel BD, G_2G_3 \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle G_1G_2G_3 \equiv \sphericalangle BOC (3) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } (1), (2) \text{ și } (3) \xRightarrow{L.U.L.} \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta BOC \Rightarrow \Rightarrow \frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{BOC}} = \left(\frac{G_1G_2}{BO} \right)^2 = \frac{4}{9} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În concluzie, } A_{G_1G_2G_3} = \frac{4}{9} \cdot A_{BOC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{A_{ABCD}}{4} = \frac{1}{9} \cdot A_{ABCD} \dots\dots\dots 1p$$

4. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CBD) = 90^\circ$. Să se arate că:

a) $AB \leq CD$;

b) $AB = CD$ dacă și numai dacă cele patru puncte sunt vârfurile unui dreptunghi.

Dan Negulescu, G.M.

Soluție.

a) Fie M mijlocul segmentului $[CD]$

Cazul I: $AB \cap CD \neq \emptyset \dots\dots\dots 2p$

$$\text{Dacă } M \in (AB) \Rightarrow AB = AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$$

$$\text{Dacă } M \notin (AB) \Rightarrow \text{în triunghiul } AMB: AB < AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$$

Cazul II: $AB \cap CD = \emptyset \dots\dots\dots 3p$

În triunghiul AMB : $AB < AM + BM = \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} = CD$

b) $AB = CD \Leftrightarrow M \in (AB) \Leftrightarrow ABCD$ dreptunghi.....2p