

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profilul servicii, profilul resurse

Clasa a XI-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ este un număr impar. Demonstrați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ este un

număr impar.

Soluție.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b+a) = \text{impar} \Rightarrow b-a \text{ impar și } b+a \text{ impar} \Rightarrow a \text{ și } b \text{ au parități diferite...4p}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = (b-a)(a^2 + ab + b^2), b-a \text{ impar și } a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab \text{ impar...3p}$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^2 = 4(A - I_2)$.

b) Determinați numărul real a știind că $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$.

Soluție.

a) Prin calcul direct se arată că $A^2 = 4(A - I_2)$3p

b) Din a) avem $A^2 = 4(A - I_2) \Leftrightarrow A^2 - 4A + 4I_2 = O_2 \mid \cdot A \Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 4A = O_2 \Leftrightarrow a = 4$..4p

3. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - ax + b) = \frac{3}{2}$.

Soluție.

Pentru ca limita să fie finită se impune condiția $a > 0$1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - ax + b) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(1-a^2) + x}{\sqrt{x^2 + x} + ax} + b \right) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} + b \right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 1. \dots\dots\dots 3p$$

4. Se consideră funcția $f_a : D_a \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{8x^3 - 27}{ax^2 + 2x + 1}$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f_a să admită asimptotă verticală într-un singur punct.

b) Pentru $a = 1$, determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f_a .

Soluție.

a) Pentru ca graficul funcției f_a să admită asimptotă verticală într-un singur punct, trebuie ca ecuația $ax^2 + 2x + 1 = 0$ să admită soluție unică, deci se impune condiția $\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1. \dots\dots\dots 2p$

b) Pentru $a = 1$, funcția este $f_1 : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{8x^3 - 27}{(x+1)^2}. \dots\dots\dots 1p$

$x = -1$ asimptotă verticală, deoarece $\lim_{x \rightarrow -1} f_1(x) = -\infty \dots\dots\dots 1p$

Din $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty \Rightarrow$ nu admite asimptotă orizontală. $\dots\dots\dots 1p$

Pentru asimptota oblică $y = mx + n$, determinăm $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 8$ și

$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f_1(x) - 8x) = -16$, deci $y = 8x - 16. \dots\dots\dots 2p$