

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profil ethnic

Clasa a XI-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 + aA\}$.
- a) Calculați A^2 .
- b) Arătați că $X(1) + X(2) + \dots + X(100) = 100 \cdot X\left(\frac{101}{2}\right)$.
- c) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - ab)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in G$.

Soluție.

- a) $A^2 = -A$ 3p
- b) $X(1) + X(2) + \dots + X(100) = 100 \cdot I_2 + (1 + 2 + 3 + \dots + 100)A =$ 1p
 $= 100 \cdot I_2 + \frac{100 \cdot 101}{2}A = 100 \cdot X\left(\frac{101}{2}\right)$ 1p
- c) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) \stackrel{Ds}{=} (I_2 + aA)I_2 + (I_2 + aA)bA \stackrel{Dd}{=} \dots$ 1p
 și cf pct a) $A^2 = -A \Rightarrow I_2 + (a + b - ab)A = X(a + b - ab)$ 1p

2. Se consideră $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Se notează cu tA transpusa matricei A .

- a) Să se demonstreze că $\det({}^tA \cdot A) \geq 0$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$.
- b) Arătați că $\det(A - {}^tA) \geq 0$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

Soluție.

- a) $\det A = \det {}^tA \Rightarrow \det A \cdot {}^tA = \det A \cdot \det {}^tA = (\det A)^2 \geq 0$ 3p
- b) Prin calcul direct $\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{vmatrix} = -(c-b)(b-c) \Rightarrow$ 2p
 $\Rightarrow \det(A - {}^tA) = (c-b)^2 \geq 0$ 2p

3. Determinați constantele reale a și b pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x \leq 2 \\ \log_2 x & , x \in (2, 4) \\ ax^2 + bx + 6 & , x \geq 4 \end{cases} \text{ are limită în punctele } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = 4.$$

Soluție.

$$l_s(2) = 2a + b; l_d(2) = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$l_s(4) = 2; l_d(4) = 16a + 4b + 6 \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = -1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = -1; b = 3 \dots\dots\dots 2p$$

4. Se consideră funcția $f_k(x) = \sqrt{x^2 + x} - k \cdot x$, unde k este un număr real fixat.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2015}(x)}{f_{2016}(x)}$.

b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$.

Soluție.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2015x}{\sqrt{x^2 + x} - 2016x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2015 \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2016 \right)} = \frac{2014}{2015} \dots\dots\dots 3p$$

$$b) " \Rightarrow " \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - k^2 x^2}{\sqrt{x^2 + x} + kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - k^2)x^2 + x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + k \right)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , k = 1 \\ \neq \frac{1}{2} & , k \neq 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$" \Leftarrow " k = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$