

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016  
Filiera tehnologică, profil tehnic**

**Clasa a IX-a, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

1. Să se arate că numărul  $n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2015$  este pătratul unui număr natural.

**Soluție.**

1, 3, 5, ..., 2015 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.....2p

$a_1 = 1, r = 2 \Rightarrow a_n = 2015 = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow n = 1008 \Rightarrow$  .....2p

$S = \frac{(1+2015) \cdot 1008}{2} = 1008^2$  pătrat perfect.....3p

2. Fie  $a, b, x \in \mathbb{R}$ .

a) Demonstrați că  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ .

b) Calculați  $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \dots (x^{512}+1)$ .

**Soluție.**

a) Demonstrarea relației  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  .....3p

b)  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$  .....1p

$(x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$  .....1p

$(x^{512}-1)(x^{512}+1) = x^{1024} - 1$  .....2p

3. Fie  $ABCD$  paralelogram,  $M$  mijlocul laturii  $[AB]$  și  $N \in (DM)$  astfel încât  $\frac{MN}{ND} = \frac{1}{2}$ .

Să se arate că:

a)  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD}$ .

b) Punctele  $A, N, C$  sunt coliniare.

**Soluție.**

a)  $\frac{MN}{ND} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD}$  .....3p

b)  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow$  Punctele

$A, N, C$  sunt coliniare.....4p

4. Se consideră un triunghi echilateral de latură 2 cm. Construind liniile mijlocii îl împărțim în 4 triunghiuri congruente. Triunghiul din mijloc îl eliminăm. Cele 3 triunghiuri echilaterale rămase le împărțim în același mod în câte 4 triunghiuri echilaterale congruente și din nou eliminăm

triunghiurile din mijloc. Repetând procedeul de 30 ori, calculați suma ariilor triunghiurilor eliminate.

**Soluție.**

Primul triunghi eliminat are  $A_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  apoi pasul 2 se elimină 3 triunghiuri cu latura  $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_{\Delta-e\text{ eliminate}} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{3}}{4}$ , la pasul al treilea se elimină 9 triunghiuri cu latura  $\frac{1}{4}$

$A_{\Delta-e\text{ eliminate}} = \frac{9}{16} \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ . .... la al 30-lea pas  $A_{\Delta-e\text{ eliminate}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{29} \frac{\sqrt{3}}{4}$  .....**3p**

Scrie suma  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{29} \right)$  .....**1p**

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\left( 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{30} \right)}{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \left( 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{29} \right)$  .....**3p**