

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A XI-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie numărul real $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a^{\frac{kx}{n}} \right) \right] = 1$.

Dan Ion, Brăila

Soluție.

$$\sum_{k=1}^n a^{\frac{kx}{n}} = a^{\frac{x}{n}} + a^{\frac{2x}{n}} + \dots + a^{\frac{nx}{n}} = a^{\frac{x}{n}} \left(\frac{a^{\frac{nx}{n}} - 1}{a^{\frac{x}{n}} - 1} \right) = a^{\frac{x}{n}} \left(\frac{a^x - 1}{a^{\frac{x}{n}} - 1} \right) \dots\dots\dots 3p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a^{\frac{x}{n}} \left(\frac{a^x - 1}{a^{\frac{x}{n}} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (a^x - 1) \cdot \frac{\frac{x}{n}}{a^{\frac{x}{n}} - 1} \cdot \frac{n}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{a^x - 1}{x} \dots\dots\dots 3p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{a^x - 1}{x} = \frac{\ln a}{\ln a} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

2. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $Tr(A) = 1$ și $\det(A) = 2$. Demonstrați că:
 $\det(A - pI_2) + \det(A^2 - qI_2) + \det(A^3 - tI_2) \geq \frac{21}{4}$, pentru orice $p, q, t \in \mathbb{R}$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - x + 2$ polinomul caracteristic al matricei A1p

Din C-H avem $A^2 - A + 2I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - qI_2 = A - (q+2)I_2$ și $A^3 - tI_2 = -(A - (-t-2)I_2)$..2p

$\det(A - pI_2) = f(p) = p^2 - p + 2$ 1p

$\det(A^2 - qI_2) = f(q+2) = (q+2)^2 - (q+2) + 2$ 1p

$$\det(A^3 - tI_2) = f(-t-2) = (t+2)^2 - (-t-2) + 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\det(A - pI_2) + \det(A^2 - qI_2) + \det(A^3 - tI_2) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(q + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4} \geq \frac{21}{4} \dots\dots\dots 1p$$

3. Fie $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 3$. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietățile

$$a_0 \in (0,1) \text{ și } a_{n+1} = a_n - a_n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita 0.

b) Determinați $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$ astfel încât șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dat prin $b_n = \sqrt[\beta]{n} \cdot a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ să fie convergent și să aibă limita în $(0, +\infty)$.

Marius Damian, Brăila

Soluție.

a) Prin inducție după $n \Rightarrow a_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este mărginit. 1p

Pe de altă parte, $a_{n+1} - a_n = -a_n^\alpha < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică șirul este strict descrescător. 1p

Deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita în $[0,1)$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 1p

b) Folosind criteriul Cesaro-Stolz, avem:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n+1} - \sqrt[\beta]{n}}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_{n+1}a_n}{a_n - a_{n+1}} \right) = \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_n^2 (1 - a_n^{\alpha-1})}{a_n^\alpha} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{1 - a_n^{\alpha-1}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot a_n^{\alpha-2}} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot (1 - a_n^{\alpha-1}) \cdot \frac{(\sqrt[\beta]{n})^{\alpha-2}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot (\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n)^{\alpha-2}} \right) = \dots \dots \dots 2p \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \dots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot (1 - a_n^{\alpha-1}) \cdot n^{\frac{\alpha-\beta-1}{\beta}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n)^{\alpha-2}} \right) \in (0, +\infty).
 \end{aligned}$$

$$\alpha - \beta - 1 = 0, \text{ adică } \beta = \alpha - 1 \text{ și mai mult } l = \frac{1}{\beta \cdot l^{\alpha-2}} \Rightarrow l^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow l = \frac{1}{\alpha-1} \dots \dots \dots 1p$$

4. Calculați suma elementelor matricei A^n , unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Narcis Gabriel Turcu, G.M.

Soluție.

$$\text{Fie } B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = I_3 + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Cum } BI_3 = I_3B = B \Rightarrow A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + \dots + C_n^n B^n \dots \dots \dots 1p$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3B \Rightarrow B^k = (-3)^{k-1} B, \forall k \in \mathbb{N}^* \dots 1p$$

$$A^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 (-3)B + \dots + C_n^n (-3)^{n-1} B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \dots \dots \dots 1p$$

$$\begin{aligned} a_1 = a_5 = a_9 &= C_n^0 + (-2)C_n^1 + (-2)C_n^2(-3) + \dots + (-2)C_n^n(-3)^{n-1} = \\ &= C_n^0 - \frac{2}{-3}C_n^0 + \frac{-2}{-3}\left(C_n^0 + C_n^1(-3) + C_n^2(-3)^2 + \dots + C_n^n(-3)^n\right) = \\ &= \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{2}{3}(1-3)^n = \frac{1}{3}\left(1 + 2(-2)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_8 &= C_n^1 + C_n^2(-3) + \dots + C_n^n(-3)^{n-1} = \\ &= -\frac{1}{-3}C_n^0 + \frac{1}{-3}\left(C_n^0 + C_n^1(-3) + C_n^2(-3)^2 + \dots + C_n^n(-3)^n\right) = \dots\dots\dots 1p \\ &= \frac{1}{3}C_n^0 - \frac{1}{3}(1-3)^n = \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^n\right) \end{aligned}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

Rezultă că $s_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p