

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A IX-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Arătați că $\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} \right] - [\sqrt{n+2} + \sqrt{n}] = \left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2} \right] - \left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{2} \right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x .

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție.

$$0 < \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2} \right] = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

În identitatea Hermite, $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$, pentru $x = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$ obținem:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{2}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} \right] \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{sau } \left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} \right] - [\sqrt{n+2} + \sqrt{n}] = - \left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{2} \right] \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

Din (1) și (2) rezultă concluzia $\dots\dots\dots 1p$

2. Determinați formula termenului general al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, știind că

$$a_2 = 3 \text{ și } \left(1 - \frac{2}{a_1^3 + 1}\right) \left(1 - \frac{2}{a_2^3 + 1}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{a_{n-1}^3 + 1}\right) = \frac{2(a_n^2 - n)}{3(n+1)a_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Adela Dimov, Brăila

Soluție.

Dacă $n = 2$, rezultă ecuația $9a_1^4 - 14a_1^3 - 9a_1 - 14 = 0 \Leftrightarrow (a_1 - 2)(9a_1^3 + 4a_1^2 + 8a_1 + 7) = 0$, care are unica soluție pozitivă $a_1 = 2 \dots\dots\dots 2p$

Presupunem $a_1 = 2, a_2 = 3, \dots, a_{n-1} = n$ și demonstrăm $a_n = n+1$ 1p

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n^2-n}{(n+1) \cdot n} \Leftrightarrow n^2+n+1 = a_n^2-n \Leftrightarrow a_n = n+1 \dots\dots\dots 3p$$

Deci $a_n = n+1, \forall n \geq 1$ 1p

4. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$ și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$, iar E, F, P sunt mijloacele segmentelor $[BM]$, $[CN]$ și respectiv $[EF]$. Să se demonstreze că M, P, C sunt coliniare dacă și numai dacă $CN = \sqrt{AC^2 - AB^2}$.

Marius Damian, Brăila

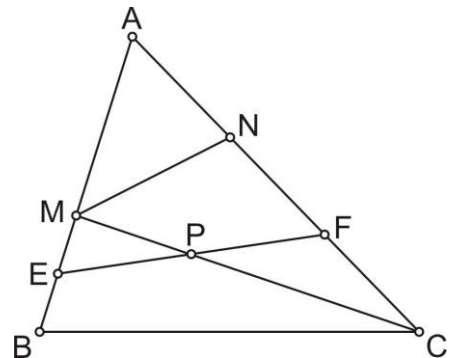
Soluție.

Din $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle NAM \equiv \sphericalangle BAC$

rezultă că $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (cazul U.U.),

$$\text{deci } \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC = k \Rightarrow AM = \frac{k}{AB}$$

$$\text{și } AN = \frac{k}{AC}.$$



$$\text{Apoi } \overrightarrow{BM} = -\frac{BM}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{AB-AM}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-1 + \frac{k}{AB^2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{și } \overrightarrow{CN} = -\frac{CN}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{AC-AN}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-1 + \frac{k}{AC^2}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin urmare: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \left(-1 + \frac{k}{AB^2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{AB^2} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned} \text{și } \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF}) = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{k}{AB^2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{k}{AC^2}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{4AB^2} \right) \cdot \overrightarrow{AB} - \left(\frac{3}{4} - \frac{k}{4AC^2} \right) \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

Astfel, M, P, C sunt coliniare dacă și numai dacă există $\alpha > 0$ astfel încât $\overrightarrow{CP} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$.

Ultima egalitate se scrie echivalent:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{4AB^2} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{k}{4AC^2} \right) \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{\alpha k}{AB^2} \cdot \overrightarrow{AB} - \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{4AB^2} - \frac{\alpha k}{AB^2} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\alpha - \frac{3}{4} + \frac{k}{4AC^2} \right) \cdot \overrightarrow{AC} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Cum vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} sunt necoliniari, obținem echivalent

$$\frac{1}{4} + \frac{k}{4AB^2} - \frac{\alpha k}{AB^2} = 0 \text{ și } \alpha - \frac{3}{4} + \frac{k}{4AC^2} = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Eliminând α avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{k}{4AB^2} - \frac{k}{AB^2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{k}{4AC^2} \right) &= 0 \Leftrightarrow AB^2 \cdot AC^2 - 2k \cdot AC^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow AB^2 \cdot AC^2 - 2AN \cdot AC \cdot AC^2 + AN^2 \cdot AC^2 &= 0 \Leftrightarrow AB^2 - 2AN \cdot AC + AN^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (AC - AN)^2 = AC^2 - AB^2 \Leftrightarrow CN^2 = AC^2 - AB^2 \Leftrightarrow CN &= \sqrt{AC^2 - AB^2} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

4. Determinați valoarea maximă a numărului natural n pentru care $\frac{17^{88} - 1}{2^n} \in \mathbb{N}$.

Carmen și Viorel Botea, G.M.

Soluția 1.

$$17^{88} - 1 = (17^{44} + 1)(17^{22} + 1)(17^{11} - 1)(17^{11} + 1) \dots\dots\dots 2p$$

$$17^{11} - 1 = (17 - 1) \underbrace{(17^{10} + 17^9 + \dots + 17^2 + 17^1 + 1)}_{\text{impar}} = 16 \cdot (2k + 1) \Rightarrow 2^4 \mid 17^{11} - 1 \text{ și } 17^{11} - 1 \nmid 2^5 \dots\dots\dots 1p$$

$$17^{11} + 1 = M_4 + 1 + 1 = M_4 + 2 : 2 \text{ și } \nmid 2^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$17^{22} + 1 = M_4 + 1 + 1 = M_4 + 2 : 2 \text{ și } \nmid 2^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$17^{44} + 1 = M_4 + 1 + 1 = M_4 + 2 : 2 \text{ și } \nmid 2^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } 2^4 \cdot 2^3 = 2^7 \Rightarrow n = 7 \dots\dots\dots 1p$$

Soluția 2.

Vom utiliza *Lifting The Exponent Lemma* (LTE) a lui Amir Hossein Parvardi (2011).

Notăm $v_p(n)$ = exponentul numărului prim p din descompunerea în factori primi a lui n .

Teoremă: Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$..3p

Obținem $v_2(17^{88} - 1^{88}) = v_2(17 - 1) + v_2(17 + 1) + v_2(88) - 1 = 4 + 1 + 3 - 1 = 7$ 4p