

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
“ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016  
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

**CLASA a XII-a, SUBIECTE**

1. Pe mulțimea  $G = (0,1)$  se definește legea de compoziție

$$x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - x - y}, (\forall) x, y \in (0,1).$$

a) Arătați că, oricare ar fi  $x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$ .

b) Se definește funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0,1), f(x) = \frac{x}{x+1}$ . Știind că  $(G, *)$  este grup, demonstrați că funcția  $f$  este un izomorfism de la grupul  $((0, +\infty), \cdot)$  la grupul  $(G, *)$ .

2. Fie mulțimea  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \right\}$ . Demonstrați că mulțimea  $M$

împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup abelian.

3. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{1004} + 2016^x$ .

a) Calculați  $\int f(x) dx$ .

b) Arătați că orice primitivă a funcției  $f$  este o funcție strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

4. Se definește funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ .

a) Arătați că  $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ .

b) Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$  și calculați mulțimea primitivelor acesteia pe mulțimea numerelor reale.

*Probleme selectate de prof. Mădălina Teodorescu*

**Notă:1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

**2. Listele cu elevii calificați la etapa județeană și baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-ul [matematicabr.weebly.com](http://matematicabr.weebly.com).**