

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”, ETAPA LOCALĂ, 21.02.2016
Filiera tehnologică, profil tehnic**

CLASA A XI-A, SUBIECTE

1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea

$$G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R}, X(a) = I_2 + aA\}.$$

a) Calculați A^2 .

b) Arătați că $X(1) + X(2) + \dots + X(100) = 100 \cdot X\left(\frac{101}{2}\right)$.

c) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - ab)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in G$.

2. Se consideră $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Se notează cu tA transpusa matricei A .

a) Să se demonstreze că $\det({}^tA \cdot A) \geq 0$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

b) Arătați că $\det(A - {}^tA) \geq 0$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

3. Determinați constantele reale a și b pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x \leq 2 \\ \log_2 x & , x \in (2, 4) \\ ax^2 + bx + 6 & , x \geq 4 \end{cases} \text{ are limită în punctele } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = 4.$$

4. Se consideră funcția $f_k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f_k(x) = \sqrt{x^2 + x} - k \cdot x$, unde k este un număr real fixat.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2015}(x)}{f_{2016}(x)}$.

b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$.

Probleme selectate de prof. Ciorăscu Marian și prof. Rodica Ciucă.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

2. Listele cu elevii calificați la etapa județeană și baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-ul matematicabr.weebly.com.