

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 21 Februarie 2016

Clasa a XII – a

SUBIECTUL I (7 p)

Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție " \circ " definită pe \mathbb{R} astfel: $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Demonstrați că (\mathbb{R}, \circ) este monoid comutativ;
b) Determinați numerele reale x cu proprietatea că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016 \text{ de } x} = x$.

SUBIECTUL II (7 p)

- a) Calculați $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(a_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin $a_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(0)$.
b) Dacă f este derivabilă în $x = 0$ să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - f(0))$.

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie (G, \cdot) un grup cu $2n+1$ elemente și o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea :

$$f(xf(xy)) = yf(x^2), \forall x, y \in G.$$

Să se demonstreze că G este grup comutativ.

Gazeta Matematică

NOTĂ

- ☐ Toate subiectele sunt obligatorii;
- ☐ Nu se acordă puncte din oficiu;
- ☐ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, Botoșani, 21.02.2016

Clasa aXII-a

BAREM DE NOTARE

SUBIECTUL I (7 p)

Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție " \circ " definită pe \mathbb{R} astfel: $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Demonstrați că (\mathbb{R}, \circ) este monoid comutativ;
b) Determinați numerele reale x cu proprietatea că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016 \text{ dex}} = x$.

Soluție

a) Se verifică axiomele monoidului. 3p

b) Avem $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016 \text{ dex}} = (x - a)^{2016} + a$ 2p

Ecuția devine $(x - a)^{2016} = x - a$ 1p

Se obține $x \in \{a, a + 1\}$ 1p

SUBIECTUL II (7 p)

a) Calculați $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$.

Soluție:

a) $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} \int \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx + \frac{3}{5} \int \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + C \dots 3p$

b) Se folosește schimbarea de variabilă $y = -x$ 4p

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(a_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin $a_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(0)$.

b) Dacă f este derivabilă în $x = 0$ să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - f(0))$.

Soluție:

a) Schimbarea de variabilă $t = \frac{x}{n}$ și se obține $a_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt}{\frac{1}{n}}$ 1p

Se aplică regula lui l'Hospital și se obține $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = f(0)$ 1p

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt}{\frac{1}{n}} = f(0)$ și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(0)$ 1p

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - f(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt - f(0) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f(0)}{\frac{1}{n^2}}$ 2p

Se aplică regula lui l'Hospital și se obține $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - xf(0)}{x^2} = \frac{1}{2} f'(0)$

și se deduce că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - f(0)) = \frac{1}{2} f'(0)$ 2p

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie (G, \cdot) un grup cu $2n+1$ elemente și o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea :

$$f(xf(xy)) = yf(x^2), \forall x, y \in G.$$

Să se demonstreze că G este grup comutativ.

Solutie:

Gazeta Matematică

Pentru $x=e$ în relația dată obținem $f(f(y)) = yf(e)$, pentru orice $y \in G$, de unde rezultă că f este injectivă2p

Pentru $y = e$ în relația dată, obținem $f(xf(x)) = f(x^2)$, pentru orice $x \in G$ și folosind faptul că f este injectivă avem: $xf(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x$ pentru orice $x \in G$ 2p

Relația din enunț devine $x^2y = yx^2$, G are $2n+1$ elemente, deci $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$ 1p

Avem $xy = x^{2n+2}y = (x^{n+1})^2y = y(x^{n+1})^2 = yx^{2n+2} = yx$ 2p