

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a  
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 1

1. a) Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $a^2 + b^2 \leq 2ab$ . Demonstrați că  $a = b$ .  
b) Fie  $x, y \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$ . Demonstrați că numărul  $3^x + 3^y$  se divide cu 41.

2. Demonstrați că, dacă  $x - 7y + 3 = 0$  și  $x \in [-3; 4]$ , atunci:

$$E(x, y) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

3. Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paralelipiped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralelipedului sunt exprimate cu același număr?

4. Se consideră tetraedrul ABCD în care  $AB \perp CD$ . Fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei BD. Pe semidreapta (DM alegem punctul E astfel încât  $DE = 2DM$ , iar pe semidreapta (CN alegem punctul F astfel încât  $CF = 2CN$

- a) Demonstrați că punctele F, B, E sunt coliniare;  
b) Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

5. Pe planul paralelogramului ABCD se ridică perpendiculara AP. Fie M mijlocul segmentului [AB], iar N mijlocul segmentului [DM]. Arătați că  $PN \perp DM$  dacă și numai dacă  $DM \perp MC$ .

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a  
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 2

1. Fie  $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  și  $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Să se arate că  $x^n + y^n \geq 2$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Să se demonstreze că:

a)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \in \mathbb{N}$ ;

b)  $\frac{2}{4 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 14} + \frac{2}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{2}{2009 \cdot 2014} \in \left(0; \frac{1}{10}\right)$ .

3. Lungimile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paralelipiped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Una dintre muchii este de 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralelipedului sunt exprimate cu același număr?

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Luăm punctul P pe cateta AB și punctul Q pe cateta BC astfel încât  $AP = CB$  și  $BP = CQ$ . Să se demonstreze că unghiul format de segmentele AQ și CP este de  $45^\circ$ .

5. În piramida patrulateră regulată VABCD se dă înălțimea  $VO = 3\sqrt{2}$  cm,  $AB = 6$  cm. Să se calculeze :  
a) Tangenta unghiului format de dreptele VA și DC  
b) Măsura unghiului format de dreapta VA și proiecția dreptei VA pe planul bazei  
c) Distanța de la punctul O la planul (VBC).