

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 1

1. Cinci frați au împreună 79 ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta celui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei frați este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului. Aflați vârstele celor 5 frați.

Rezolvare

Fie a, b, c, d, e vârstele celor cinci frați.

$$a+b+c+d+e=79 \quad (1) \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\frac{a+17+b+c}{3}=d \Rightarrow a+17+b+c=3d \quad (2) \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$2d-6=e \quad (3) \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Înlocuind relațiile (2) și (3) în (1) se obține } 3d+d+2d-6=96 \Rightarrow 6d=102 \Rightarrow d=17 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow e=28 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Din } a=\frac{1}{7}e \text{ și } \frac{1}{2}b=\frac{1}{4}e \text{ rezultă } a=4, b=14, c=16 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

2. Să se demonstreze că: $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$

Rezolvare

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{2+3} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{3+4} + \dots + \frac{\sqrt{n \cdot (n+1)}}{n+(n+1)} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

$$\text{Folosind inegalitatea mediilor } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{se obține } \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{2+3} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{3+4} + \dots + \frac{\sqrt{n \cdot (n+1)}}{n+(n+1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

3. Rezolvați ecuația: $\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \dots + \frac{x+98}{99} + \frac{x+99}{100} = 2^5 \cdot 3$

Rezolvare

$$\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \dots + \frac{x+98}{99} + \frac{x+99}{100} = \frac{x}{5} + \frac{4}{5} + \frac{x}{6} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{x}{99} + \frac{98}{99} + \frac{x}{100} + \frac{99}{100} = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \dots + \frac{x}{99} + \frac{x}{100} + 1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{6} + \dots + 1 - \frac{1}{99} + 1 - \frac{1}{100} = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) + \underbrace{(1+1+\dots+1+1)}_{96} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) = 96 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow x=1 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

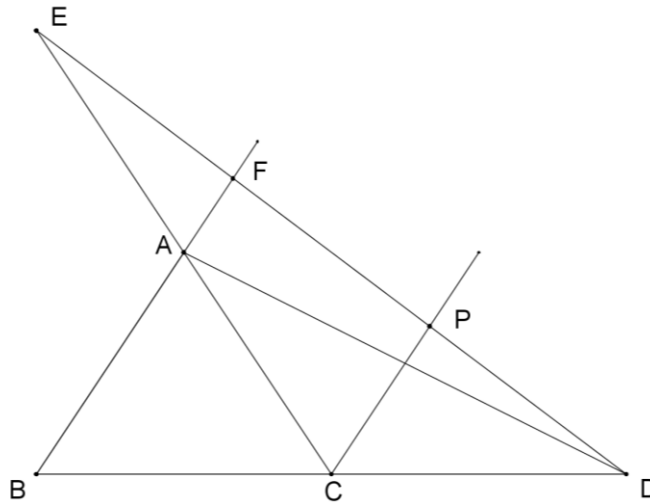
Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

4. Fie ABC un triunghi echilateral și fie $D \in BC$ astfel încât $(DC) \equiv (BC)$, respectiv $E \in AC$ astfel încât $(AE) \equiv (AC)$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$ arătați că:

a) $AB = 3AF$

b) DAF este triunghi dreptunghic.

Rezolvare



Desen 1 p

a) CP l.m. în triunghiul BDF $\Rightarrow CP = \frac{BF}{2} = \frac{AB + AF}{2}$ (1) 2 p

AF l.m. în triunghiul ECP $\Rightarrow AF = \frac{CP}{2}$ (2) 1 p

Din (1) și (2) rezultă $AF = \frac{AB + AF}{4}$ 1 p

$\Rightarrow 4AF = AB + AF$ de unde $3AF = AB$ 1 p

b) triunghiul ACD este isoscel și $m(\angle ACD) = 120^\circ \Rightarrow m(\angle CAD) = 30^\circ$ 2 p

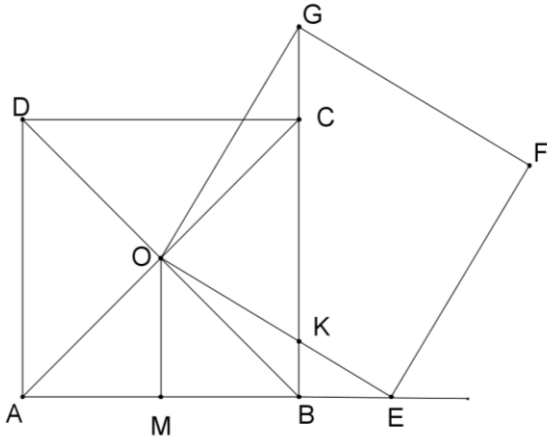
$m(\angle BAD) = m(\angle BAC) + m(\angle CAD) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ 1 p

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

5. Fie $ABCD$ un pătrat în care s-a notat cu O intersecția diagonalelor. Construim pătratul $OEFG$ congruent cu pătratul $ABCD$ astfel încât $B \in (AE)$.

- Demonstrați că punctele B, C, G sunt coliniare!
- Determinați măsurile unghiurilor triunghiului BEO
- Dacă $OE \cap BC = \{K\}$ arătați că $CG \cdot KG = OE \cdot KE$.

Rezolvare



Desen 1 p

a) $OBE_{\Delta} \equiv OCG_{\Delta}$ (1) 2 p

$m(\angle OBE) = 135^\circ$ (2) 0,5 p

Din (1) și (2) rezultă $m(\angle OCG) = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow B, C, G$ sunt coliniare 1 p

b) $OM \perp AB$ și $OM = \frac{OE}{2} \Rightarrow m(\angle BEO) = m(\angle MEO) = 30^\circ$ 2 p

$m(\angle OBE) = 135^\circ \Rightarrow m(\angle BOE) = 15^\circ$ 0,5 p

c) $KBE_{\Delta} \sim KOG_{\Delta}$ 1 p

$\Rightarrow \frac{KE}{KG} = \frac{BE}{OG} = \frac{CG}{OE} \Rightarrow KE \cdot OE = KG \cdot CG$ 1 p